Une contribution à la théorie du pouvoir : Conflits - Négociation et Stabilité

Dawidson Razafimahatolotra

Université Paris 1 Panthéon Sorbonne
École d'Économie de Paris

Thèse

« Mathématiques Appliquées »

Présenté par

Dawidson RAZAFIMAHATOLOTRA

Une contribution à la théorie du pouvoir :

Conflits - Négociation et Stabilité

Directeur de thèse : Pr. Joseph ABDOU

Soutenue le *22 mai 2009* devant le jury composé de :

Monsieur Hans KEIDING	Université de Copenhague	Rapporteur
Monsieur Maurice SALLES	Université de Caen Basse-Normandie	Rapporteur
Monsieur Tristan TOMALA	Hautes Études Commerciales - Paris	Jury
Monsieur Michael GRABISCH	Université Paris 1 Panthéon Sorbonne	Jury
Monsieur Emmanuel PICAVET	Université Paris 1 Panthéon Sorbonne	Jury
Monsieur Joseph ABDOU	Université Paris 1 Panthéon Sorbonne	Directeur

A Lucka et Luciana Dawidson

A Velosoaniaina*, pour les moments partagés durant cette thèse.*

Remerciements

Ce doctorat ne pourrait avoir le jour sans la contribution de plusieurs personnes sur différents aspects.

Sur le plan scientifique, je tiens à remercier :

- Le directeur de thèse, le Professeur Abdou Joseph, qui a accepté de me diriger et de proposer ce thème. Ses conseils qui touchent l'épistémologie, la méthodologie et les aspects techniques du problème m'ont été précieux, non seulement pour avoir un diplôme, mais également pour un objectif plus large.

- Dr. Emmanuel Picavet avec qui j'ai travaillé dans le programme Delicom. Nos conversations ont déterminé et ont orienté les interprétations et les applications de mes recherches doctorales.

- Pr. Hans Keiding et Pr. Maurice Sales d'être les rapporteurs de cette thèse, et je les en remercie, de même que pour leur participation au Jury. Ils ont également contribué par leurs nombreuses remarques et suggestions à améliorer la qualité de ce travail, et je leur en suis très reconnaissant.

- Pr. Michael Grabisch et Pr Tristan Tomala, qui m'ont fait l'honneur de participer au Jury de soutenance ; je les en remercie profondément.

- Dr. Betrand Tchantcho, de nos discussions scientifiques sur différents problèmes en choix social à l'Université de Caen.

Sur le plan institutionnel, je tiens à remercier :

- Le directeur du Laboratoire, le Professeur Bernard Cornet, pour m'avoir accueilli au sein de l'École d'Économie de Paris.

- Le réseau Cedimes représenté par le Professeur Albagli Claude et le laboratoire C3edm, actuellement représenté par le Docteur Jérôme Ballet, des opportunités que j'ai eu en matière d'échanges scientifiques.

Sur le plan financier, je tiens à remercier :

- Le Service de Coopération et d'Action Culturelle (SCAC) de l'Ambassade de France à Madagascar des bourses qu'il a alloué au début de ce doctorat.

- L'UFR 27 de l'Université Paris 1 qui m'a attribué un post d'ATER.

Je tiens à remercier également,

- Madame Virginie Jourand et mademoiselle Amélie Fradin d'avoir accepté de me lire pour la version finale de cette thèse.

- Enfin, je voudrais remercier mes collègues et amis Pr Sahondravololona Rajemison, Pr Arthur Andrianarivony, Pr Benjamin Rakotoambinina et les autres pour leur aide sympathique tant sur le plan scientifique qu'humain.

Paris, le 26 juin 2009.

Table des matières

Introduction générale

Plus il appartient de réalité à la nature,
plus elle a par elle-même de forces pour exister.
Spinoza

La théorie des jeux comme une discipline de mathématiques est née des séries de papiers de John von Neumann (1928) alors qu'il a transformé ses travaux sur la théorie des ensembles en modèle d'interaction entre deux entités nommées joueurs. En 1944, John von Neumann et Oskar Morgenstern ont systématisé ces études dans l'ouvrage *"Theory of Games and Economic Behavior"* où les différents concepts que nous étudions aujourd'hui y sont déjà tracés. Actuellement, la théorie des jeux offre trois instruments d'analyse et de formalisation de plusieurs phénomènes tels qu'un élément d'une réalité biologique, le mécanisme de fonctionnement d'un réseau, l'organisation d'une société etc. En tant qu'outil de modélisation de l'organisation sociale, le premier instrument qu'elle propose est connu sous le nom de *jeux stratégiques* et insiste sur l'individu dans le processus de décision. Le second qui représente la société en *jeux coopératifs* souligne la coopération et la formation des coalitions, et regroupe les jeux à utilités transférables et les jeux à utilités non transférables. Ces deux instruments partagent le modèle social en deux modèles non conciliables où le premier suppose que l'issue sociale résulte des interactions des joueurs alors que le second suppose que chaque joueur ne vaut que via les institutions ou groupes auxquels il appartient. Le troisième instrument, qui a été introduit par Hervé Moulin (1982) sous forme de pouvoir proportionnel, puis par Hervé Moulin et Bezalel Peleg (1982) en forme générale de répartition de pouvoir dans une organisation, s'appelle *fonction d'effectivité*. La fonction d'effectivité résout en partie la dichotomisation laissée par les deux premières représentations. Cette unification se fait par l'implémentation des issues sociales stables via modèle stratégique. Elle permet également de lier la théorie du choix social avec les modèles de gouvernance.

Cette thèse aura six chapitres dont deux sont une mise en évidence des problèmes de gouvernance par la fonction d'effectivité. Le premier chapitre est une introduction à la fonction d'effectivité. Les chapitres deux à cinq sont purement techniques et mathématiques. Le deuxième chapitre aborde le problème de conflits, dans le sens où toutes les issues sociales sont opposables. Ce chapitre est une étude de cycle, notion introduite par Joseph Abdou (1982), généralisée par Hans Keiding (1985) pour caractériser l'instabilité d'une fonction d'effectivité. Par opposition au deuxième chapitre, le troisième chapitre répond à la question "Comment atteindre l'issue sociale stable" ? Dans le quatrième chapitre, nous définissons et étudions les ensembles du marchandage au sens de Zhou et au sens de Mas-Colell en fonction d'effectivité. Le cinquième chapitre étudie la répartition des pouvoirs d'une correspondance de choix social et donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que celle-ci soit implémentable par une solution d'une fonction d'effectivité. Le dernier chapitre est une application de la fonction d'effectivité à la théorie de gouvernance. Ce travail, qui est à la fois épistémique et synthétique, est un début d'un essai sur la "théorie pure du pouvoir", modèle d'organisation et de gouvernance basé sur la nature (source, répartition etc) du pouvoir et de ses mécanismes.

1 Introduction à la fonction d'effectivité

Le pouvoir d'un groupe d'acteurs se mesure par ses capacités à atteindre ses objectifs dans une situation donnée, et sa répartition dans une organisation est représentée par une fonction d'effectivité. Cette représentation nous permet de faire une analyse formelle du pouvoir dont les modes d'acquisition, les conflits, les moyens de régulation ainsi que le mécanisme du choix de l'issue finale de l'organisation. Dans la première partie, nous traitons plusieurs questions sur le pouvoir et dans la deuxième partie nous étudions la fonction d'effectivité afin de montrer comment résoudre formellement les problèmes posés dans la première partie.

Mots-clés : Fonction d'effectivité, distribution de pouvoir, conflit, stabilité.

JEL Classification : C71, C79.

AMS classification : 91A12

1.1 Introduction

Une organisation est un ensemble d'acteurs agissant selon la structure du pouvoir et la distribution de l'autorité. Le pouvoir d'un individu ou d'un groupe d'individus se mesure par ses capacités à atteindre ses objectifs. L'effectivité du pouvoir d'un membre de l'organisation peut résulter de ses compétences, de ses influences ou de ses rapports fonctionnels avec d'autres membres : par sa réputation, par ses qualités de persuasion, sa crédibilité et tout simplement par ses positions et sa fonction dans l'organisation. Mais, d'autres facteurs plus conventionnels sont également à l'origine du pouvoir : les moyens d'actions et les libertés attribuées par une structure extérieure ; comme par exemple, dans une entreprise où les pouvoirs et les autorités sont définis par rapport à l'objectif et l'organigramme de l'entreprise. Dans nos études de cas dans le projet Delicom [1], nous avons observé que la confusion et le chevauchement des limites des pouvoirs des parties prenantes d'une organisation risquent de conduire au désordre ou à l'immobilisme par le manque de moyens d'action, qui paralyse l'organisation.

Sur le plan technique et mathématique, la question du pouvoir peut être un problème de mesure et de grandeur (tel joueur en possède plus qu'un autre), mais aussi de structure. Dans le premier cas, la mesure des influences sur les états de la nature est représentée par une distribution de nombres qui permet de comparer les pouvoirs relatifs de chaque joueur. Ce procédé est alors conventionnel, et les interprétations qui en découlent dépendent de l'orientation, généralement normative, de l'analyse. Pour les *indices de pouvoir* de Shapley-Shubik (52), (53), (54), (65) ou celui de Banzhaf (13), (23), (14), (18) ou autres, les états de la nature forment un ensemble totalement ordonné. Cette représentation permet de calculer l'influence d'un individu sur la base de ses apports marginaux. Dans le deuxième cas, où les états de la nature sont des objets qualitatifs, la mesure et la comparaison des coalitions par une grandeur sont inadéquates. Par exemple, pour le choix de la politique énergétique dont les alternatives sont l'énergie renouvelable, l'énergie fossile, l'énergie nucléaire, d'autres énergies, le problème ne se pose pas en terme de mesure car un joueur peut par exemple imposer l'énergie nucléaire, non pas par rapport à une valeur mesurable mais par ses compétences en la matière et la disponibilité des moyens techniques et des ressources nécessaires.

Les études du pouvoir fondées sur les *indices de pouvoir* admettent en général l'hypothèse implicite d'unité et de cohérence de ses sources. Par exemple, les pouvoirs sont déterminés par une règle de vote ou encore les pouvoirs découlent de l'organigramme de l'organisation. Toutefois, nos études de cas comme celui du programme Delicom montrent que le pouvoir dans une organisation peut avoir des sources multiples et non homogènes. L'institutionnalisation de certaines règles et normes sociales relatives à une conviction éthique, idéologique ou religieuse est une cause à cette multiplicité. Celle-ci entraîne également une fracture entre les moyens d'actions formels et les pouvoirs réels. La méconnaissance des sources du pouvoir peut avoir des conséquences sur la *description* des états

1. `http://epi.univ-paris1.fr`

sociaux et favorise l'incohérence des actions. Supposons que l'État donne plus de moyens financiers à une institution chargée de la protection de l'environnement et supposons que celle-ci manque de spécialistes compétents alors qu'une autre institution ou organisation sans souci de l'environnement possède des moyens humains et techniques dynamiques et innovants. Le pouvoir formel prévoit que l'issue sociale soit dans un ensemble d'alternatives qui ne nuit pas à l'environnement, pour lequel les moyens financiers ont été déployés, mais le pouvoir réel de la deuxième institution peut désorienter les objectifs de ces fonds de sorte que l'issue sociale ne soit pas respectueuse de l'environnement. On observe les mêmes phénomènes dans les systèmes pluralistes où chaque interprétation de la norme donne lieu à une structure de pouvoir. Voir (44) et le document de HDR de Picavet Emmanuel : Talos ou la matrice libérale (42).

Nous identifions et tentons donc d'élucider dans le présent travail deux problèmes relatifs aux pouvoirs dans une organisation : la structure de pouvoir selon une source donnée et la coexistence de plusieurs structures de pouvoirs qui donnent lieu aux problèmes des institutions tels que la cohérence des actions et la migration du pouvoir, et au contraste entre le pouvoir réel et le pouvoir formel.

L'instrument dont nous disposons pour unifier ces deux catégories de problèmes concerne la fonction d'effectivité, introduite par H. Moulin & B. Peleg (32)(1982) dans l'objectif de généraliser les correspondances de veto proportionnel (31), (33). Une fonction d'effectivité définit la répartition de pouvoir d'une organisation, les états sociaux étant un ensemble qui peut ne pas avoir de structure. Elle associe à chaque coalition une famille de sous ensembles de l'ensemble des états sociaux. L'appartenance d'un ensemble à l'effectivité d'une coalition signifie que celle-ci a le pouvoir de bloquer les alternatives de son complémentaire. La fonction d'effectivité est de plus en plus utilisée comme dans l'ouvrage de Ishiishi "The cooperative nature of the firm" ou celui de Bezalel Peleg (36),(39), Vannucci S.(62), van Hees (60), et se présente actuellement comme l'instrument le plus général de la théorie des jeux en matière de sciences sociales. Elle permet également d'unifier les approches stratégiques des approches coalitionnelles et complète le triangle d'implémentation entre les formes de jeux, les correspondances de choix social et les solutions institutionnelles. D'autres formulations de la structure du pouvoir ont été proposées par J. Abdou & H.Keiding (1990) (fonction d'effectivité locale ou structure d'effectivité), mais nous restons sur les fonctions d'effectivité, dites globales, car elles sont suffisantes pour rendre compte des problèmes que nous avions posés.

Ce travail aura deux parties. Dans la première, nous montrons en quoi une fonction d'effectivité renvoie à la fois à une catégorie théorique du pouvoir et à des faits observables. Nous y montrons également la procédure de formalisation et les problèmes techniques et théoriques posés par cette méthode. La deuxième partie présentera la fonction d'effectivité d'un point de vue mathématique : sa définition, ses propriétés, les problèmes étudiés ainsi que les résultats principaux avec leurs interprétations en matière de pouvoir et d'organisation.

1.2 Le pouvoir dans une organisation

1.2.1 L'aspect formel du pouvoir

Le pouvoir en tant que fait social est une notion observable à travers les modifications des états sociaux, qui traduisent le pouvoir de celui par qui elles ont été faites. Un état social est une alternative sans aucune relation de dépendance avec les influences relatives des joueurs dans la société. Pourtant, cela n'exclut pas le fait qu'un état social soit exprimé en matière de position relative d'un joueur par rapport à un autre ; comme un joueur dépend d'un autre pour agir. Ainsi, la formalisation du pouvoir dépend de la représentation qu'on se fait des états de la nature. Cette représentation découle des programmes politiques ou des actions conjointes des joueurs.

Pour commencer, considérons l'exemple d'une organisation où les états sociaux sont des nombres réels. Cela permet de construire une fonction réelle qui associe à chaque coalition un nombre mesurant ses capacités. Dans ce cas, les opérations mathématiques usuelles (différenciation, comparaison etc.) ont un sens. Le cas des jeux à utilités transférables est un exemple de situation où les états sociaux sont des nombres. En effet, si $N = \{1, \ldots, n\}$ désigne l'ensemble des joueurs, alors à chaque coalition $S \subset N$, on peut associer le nombre $v(S)$ dit valeur de S. Par conséquent, pour chaque $i \in N$ et $S \subset N \setminus \{i\}$, $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ mesure l'apport de i dans $S \cup \{i\}$. Donc, dans le cas où il n'y a aucune restriction pour entrer dans les coalitions, la moyenne sur tous les $S \subset N \setminus \{i\}$ donne la contribution marginale de i. Cette technique d'évaluation, avec le choix de la formule de la moyenne, est à la base de l' *indice de pouvoir* de Shapley-Shubik (53) et de celui de Banzhaf (18) (2003). Celui de Banzhaf est par exemple donné par :

$$\varphi(i) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} v(S \cup \{i\} - v(S))$$

Notons que les travaux de Dubey et al. ont donné une complète caractérisation de l'indice de Banzhaf et montrent que cet indice est adéquat pour les votes à deux étapes.

Les indices de pouvoir ont beaucoup d'importance pour les jeux de vote, en particulier ceux avec pondérations, car ils permettent de déterminer les quotas de vote de chaque joueur selon une structure de coalition voulue. Supposons par exemple qu'il y ait quatre joueurs $\{1, 2, 3, 4\}$ et l'issue sociale sera sélectionnée selon le vote à majorité simple. Pour que 1 ne soit pas perçu comme un dictateur même s'il en est presque, on lui donne un quota tel que $\varphi(i) + \varphi(j) \leq 50\%, \forall i, j \in \{2, 3, 4\}$. Donc, pour que le joueur $\{1\}$ puisse avoir une position essentielle, voire dictatoriale, il suffit qu'on attribue aux membres de $\{2, 3, 4\}$ des pouvoirs tels que la formation de la coalition $S \cup \{1\}$ soit aussi naturelle que possible, pour tout $S \subset \{2, 3, 4\}$. Par exemple, les quotas sont $(28\%, 24\%, 24\%, 24\%)$. Dans ce cas, $\{1, j\}$ $(i = 2 \ldots 4)$ sont des coalitions gagnantes alors que $\{i, j\}$ $(i, j = 2 \ldots 4)$ ne le sont pas.

Supposons maintenant que les états sociaux ne sont pas des nombres mais des alternatives non divisibles telles que $\{x_1, \ldots, x_m\}$. Si l'ensemble A

ne possède aucune structure, alors être en mesure de bloquer un ensemble d'alternatives $B \subset \{x_1, \ldots, x_n\}$ n'exprime que le pouvoir de la coalition et ne donne aucune indication si celle-ci possède autant de pouvoir qu'une autre ou non. Dans ce cas, une inéquation de type $\varphi(i) \leq \varphi(j), \forall i, j \in N$ n'a aucun sens. Pour illustration, considérons l'exemple suivant :

Exemple 1.1 *Soit une famille à trois personnes* $\{$ *Père, Mère, Fils*$\}$ *où chaque décision est un dernier terme d'échanges d'arguments, et les alternatives sont les couleurs du mur de la maison, disons* $\{Bleu,\ Blanc,\ Vert\}$.

Ici, imposer une couleur ne reflète que la capacité argumentative d'exclusion des autres couleurs de la coalition. Supposons que la distribution des pouvoirs est définie comme suit : le père a des arguments persuasifs pour imposer la couleur blanche, la mère a les arguments nécessaires pour rayer la couleur bleue et la mère avec l'enfant a les moyens d'imposer n'importe quelle couleur de leur choix. Mathématiquement, la coalition $\{Père\}$ est effective pour $\{Blanc\}, \{Blanc,\ Bleu\}, \{Blanc,\ Vert\}$ et $\{Blanc,\ Bleu,\ Vert\}$. La coalition $\{Mère\}$ est effective pour $\{Blanc,\ Vert\}$, $\{Blanc,\ Vert,\ Bleu\}$ et la coalition $\{Mère, Fils\}$ est effective pour tout ensemble non vide $B \subset \{Bleu,\ Blanc,\ Vert\}$.

Dans cet exemple, les états sociaux sont des objets qualitatifs. Mais, en général ils peuvent être des ensembles mesurables comme l'exemple d'un assemblé à n députés où le jeu consiste à attribuer à chaque coalition de taille s le droit de veto contre $b(s)$ alternatives. Si $b(s)$ est relativement proportionnel à la taille s de la coalition S, alors $b(s) = \lceil s\frac{m}{n} \rceil - 1$ où $\lceil x \rceil = \min\{n \in N \mid x \leq n\}$. On appelle fonction d'effectivité, selon un concept que nous préciserons plus tard, cette opération qui consiste à associer à chaque coalition une famille d'ensembles d'alternatives $\{B_1(S), \ldots, B_s(S)\}$ telle que S soit effectif pour bloquer tout $x \notin B_k(S), \forall k = 1 \ldots s$.

Notons qu'il est possible que l'on attribue à A une structure mathématique comme la structure hilbertienne, la structure topologique ou autre, selon le type du problème considéré mais notre propos consiste à décrire le pouvoir dans son aspect le plus général. Dans ce cas, nous nous abstenons de donner une structure particulière à A. C'est-à-dire que sur le plan technique, les opérations sur une fonction d'effectivité restent dans le domaine de l'arithmétique et de la théorie des ensembles. En outre, une fonction d'effectivité n'est pas un outil de prévision mais plutôt un outil de description, d'explication, de normalisation ou de justification des faits relatifs aux pouvoirs.

Par la suite, l'ensemble des joueurs est représenté par $N = \{1, \ldots, n\}$ et l'ensemble des alternatives par $A = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Une coalition S est un sous ensemble de N. Pour un ensemble X, on note $\mathcal{P}(X) = \{Y \subset X\}$ et $\mathcal{P}_0(X) = \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$. Chaque joueur $i \in N$ classifie les éléments de A par une relation d'ordre linéaire R^i qui sera appelé sa préférence. Le profil de l'organisation est noté $R^N = \left(R^1, \ldots, R^n\right)$ et un $S-$profil, pour une coalition $S = \{i_1, \ldots, i_s\}$ est $R^S = \left(R^{i_1}, \ldots, R^{i_s}\right)$. Si $P(S, R^N, x) = \{y \in A \mid \forall i \in S,\ y\ R^i x\}$, alors une alternative x est *dominée* s'il existe une coalition S effective pour $P(S, R^N, x)$. Une *objection* contre l'état social $x \in A$ dans le profil R^N est une paire (S, B) telle que S est effective pour B et $\forall i \in S,\ \forall y \in B;\ \ y\ R^i\ x$.

1.2.2 Acquisition du pouvoir

Le mode d'acquisition du pouvoir détermine en partie sa nature donc le choix de sa formalisation. A propos du pouvoir, nous distinguons ses origines en trois catégories : brute - stratégique - conventionnelle.

Ce paragraphe est dans l'objectif de montrer comment une fonction d'effectivité peut rendre compte des problèmes de pouvoir et en quoi il ne s'agit pas seulement d'un concept théorique mais également d'une représentation des faits observables.

Acquisition par la stratégie

L'acquisition par la stratégie suppose que l'organisation possède une structure, pas nécessairement institutionnelle ou administrative, par laquelle chaque joueur a une liste d'actions totalement ou partiellement connue par tous les membres de l'organisation. Soit Σ_i l'ensemble des actions possibles du joueur $i \in N$. Les actions conjointes des membres d'une coalition S sont retracées par : $\Sigma_S = \prod_{i \in S} \Sigma_i$. Donc, si la coalition S adopte la stratégie $\sigma_S \in \Sigma_S$ et son complémentaire $N \setminus S$ prend $\tau_{N \setminus S} \in \Sigma_{N \setminus S}$, l'action conjointe $(\sigma_S, \tau_{N \setminus S})$ donne un état social $\pi(\sigma_S, \tau_{N \setminus S})$. Soit $\pi : \prod_{i \in N} \Sigma_i \longrightarrow A$ une application surjective, dite *fonction de conséquence* , qui détermine les états sociaux atteignables. Alors, être effectif pour bloquer une alternative $x \in A$ dépend de l'existence d'une stratégie conjointe $\sigma \in \Sigma$ telle que $\pi(\sigma) = y \neq x$. Considérons l'exemple suivant pour illustration :

Exemple 1.2 *Deux textes d'une référence juridique qui donnent du pouvoir à deux groupes différents.*

Texte 1 : Le médecin est libre d'utiliser ses méthodes de soin, pourvu que ses démarches soient validées par un comité d'experts. *Texte 2* : toute personne qui cause l'infirmité ou la mort d'un tiers, volontairement ou non, est passible de prison. *Situation* : Un médecin a appliqué une méthode innovante pour laquelle la probabilité des effets négatifs imprévisibles est estimée à moins de 10% et un patient trouve la mort à la suite d'un traitement. Alors les acteurs du jeu sont $\{1, 2\}$ (1 le médecin et 2 les juges) et supposons que les issues sociales sont $\{x_1, x_2, x_3\}$ où x_1 est l'alternative "Pas de sanction" , x_2, "Sanction symbolique" et x_3 "Sanction sévère".

Supposons que les interprétations de 1 et 2 de ces textes sont respectivement $\Sigma_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$ et $\Sigma_2 = \{b_1, b_2, b_3\}$ avec

a_1 : Sans arguments : le médecin ne trouve aucun argument pour défendre à sa cause.

a_2 : L'acception du mot liberté s'étend jusqu'à la permission d'agir quelles que soient les conséquences dans les limites du raisonnable.

a_3 : Le texte est flou, donc une description des conditions de mise en application aurait dû l'accompagner.

b_1 : Le mot liberté n'inclut pas les actions à risque qui peuvent conduire à des erreurs ;

b_2 : Les erreurs sont tolérables en cas de bonne foi ;

b_3 : La liberté d'agir n'a aucune limite pourvu que les résultats attendus sont jugés d'utilité publique.

Maintenant, supposons que cette forme de jeu (Σ, π, A) est donnée par :

Joueur 2 \ Joueur 1	a_1	a_2	a_3
b_1	x_3	x_3	x_3
b_2	x_3	x_2	x_1
b_3	x_1	x_1	x_3

En matière de pouvoir, nous avons par exemple que $\pi(a_k, b_1) = x_3$, $\forall k = 1 \ldots 3$ et $\pi(a_2, b_k) \in \{x_1, x_3\}$, $\forall k = 1 \ldots 3$. Il est naturel de penser ici que $\{2\}$ a le pouvoir de forcer x_3, quelles que soient les interprétations adoptées. En général, il y a deux procédures pour décrire les pouvoirs de $\{1\}$ et de $\{2\}$ à partir de cette forme de jeu.

P1 : *Le joueur* $\{1\}$ *ou* $\{2\}$ *est effectif pour* $B \subset \{x_1, x_2, x_3\}$ *s'il existe une interprétation de* $\{1\}$ *ou* $\{2\}$ *telle que quelle que soit l'interprétation de* $\{2\}$ *ou* $\{1\}$*, la conséquence de l'action conjointe est dans B.* Donc :

$$\begin{aligned} E_\alpha(\{1\}) &= \{\{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}\} \ ; \\ E_\alpha(\{2\}) &= \{\{x_3\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}\} \ ; \\ E_\alpha(\{1,2\}) &= \{B \neq \emptyset \mid B \subset \{x_1, x_2, x_3\}\} \end{aligned}$$

P2 : *Le joueur* $\{1\}$ *ou* $\{2\}$ *est effectif pour* $B \subset \{x_1, x_2, x_3\}$ *si pour chaque interprétation de* $\{2\}$ *ou* $\{1\}$*, il existe une interprétation de* $\{1\}$ *ou de* $\{2\}$ *telle que la conséquence de l'action conjointe est dans B.* Donc

$$\begin{aligned} E_\beta(\{1\}) &= \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}\} \ ; \\ E_\beta(\{2\}) &= \{B \neq \emptyset \mid B \supset \{x_3\} \text{ ou } B \supset \{x_1, x_2\}\} \ ; \\ E_\beta(\{1,2\}) &= \{B \neq \emptyset \mid B \subset \{x_1, x_2, x_3\}\} \end{aligned}$$

Le comportement dans P2 est plus adaptatif que celui dans P1 et offre plus de pouvoir.

Formellement, il y a plusieurs procédures pour acquérir le pouvoir à partir d'une forme de jeu. Les plus connus sont l' $\alpha-$effectivité et la $\beta-$effectivité, mais il y a d'autres types de garantie de pouvoir comme les exactes et bi-exactes (2). (Pour l'α et β effectivité, voir (5) ou (17) ou les travaux de B. Peleg comme par exemple (36)). Une coalition S est $\alpha-$ effective pour un ensemble d'alternatives B s'il existe $\sigma_S \in \Sigma_S$ tel que pour tout $\tau_{N\setminus S} \in \Sigma_{N\setminus S}$, $\pi(\sigma_S, \sigma_{N\setminus S}) \in B$. C'est à dire que S possède une stratégie conjointe σ_S qui lui permet de bloquer tous les états sociaux en dehors de B, quelles que soient les stratégies conjointes adoptées par les joueurs restants. D'une manière duale, une coalition S est $\beta-$ effective pour un ensemble d'alternatives B si pour tout $\tau_{N\setminus S} \in \Sigma_{N\setminus S}$ il existe $\sigma_S \in \Sigma_S$ tel que $\pi(\sigma_S, \sigma_{N\setminus S}) \in B$. Ces deux procédés nous donnent deux fonctions d'effectivité :

1. *Alpha-effectivité* : Soit $G = (\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n, A, \pi)$. On définit

$$E^G_\alpha(S) = \{B \in \mathcal{P}_0(A) \mid \ \exists \sigma_S \in \Sigma_S \text{ tel que } \forall\ \tau_{N\setminus S} \in \Sigma_{N\setminus S} :\ \pi(\sigma_S, \tau_{N\setminus S}) \in B\}$$

Une coalition S peut se garantir de B à condition qu'elle ait la possibilité d'agir avant les autres de sorte que quoi que fasse $N \setminus S$, la conséquence de l'action commune $\pi(\sigma_S, \tau_{N\setminus S})$ ne soit jamais en dehors de B.

2. *Beta-effectivité* : Soit $G = (\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n, A, \pi)$. On définit

$$E^G_\beta(S) = \{B \in \mathcal{P}_0(A) \mid \ \forall\ \sigma_S \in \Sigma_S \text{ tel que } \forall\ \tau_{N\setminus S} \in \Sigma_{N\setminus S} : \ \pi(\sigma_S, \tau_{N\setminus S}) \in B\}$$

Une coalition S peut se garantir B pourvu qu'elle ait le moyen de répondre aux actions des autres afin que la conséquence de l'action commune $\pi(\sigma_S, \sigma_{N\setminus S})$ ne soit pas en dehors de B. Ce type de garantie de pouvoir offre à S une large marge de manoeuvre par comparaison avec le type de garantie alpha, car il suffit qu'il ait le moyen de bien répondre aux actions des autres pour s'approprier du pouvoir.

Attribution conventionnelle

L'attribution conventionnelle de pouvoir ne fait référence ni aux forces ni aux stratégies des joueurs. Elle peut être attribuée de manière purement conventionnelle et normative comme dans le cas des pouvoirs attribués au Comité d'Administration et aux salariés dans une entreprise, ou d'un système de lois qui attribuent aux citoyens leurs droits et devoirs. Dans ce cas, on décrit tout simplement les limites du pouvoir de chaque coalition ainsi que les propriétés de sa répartition. Dans un autre cas, le pouvoir passe par un mécanisme de *correspondance de choix social*. C'est-à-dire qu'à partir d'un profil de préférences R^N, on définit une préférence, disons $f(R^N)$, une agrégation des préférences, qui sera la préférence sociale et fixera l'issue du jeu. Ainsi, nous décrivons une application, $H : \mathcal{L}^N(A) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ qui sélectionne l'issue du jeu. Pour illustration, prenons les trois exemples suivants :

Exemple 1.3 *Les membres de l'organisation se sont mis d'accord pour confier à un joueur $i_0 \in N$ le choix de l'issue sociale. Donc, $f(R^N) = R^{i_0}$.*

Par conséquent, $H(R^N)$ est la meilleure option aux yeux du joueur i_0. En matière de pouvoir, quel que soit le profil $Q^{N\setminus\{i_0\}}$ des joueurs restants $N \setminus \{i_0\}$, $H(R^{i_0}, Q^{N\setminus\{i_0\}})$ ne dépend que de la préférence de i_0. Ainsi, les coalitions ne contenant pas i_0 n'ont aucun pouvoir pour déterminer l'issue du jeu alors que les coalitions contenant i_0 ont ce pouvoir. Donc, $E(S) = \{A\}$ si $i_0 \notin S_0$ et $E(S) = \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ si $i_0 \in S$.

Exemple 1.4 *La préférence du joueur $i \in N$ est comptée $n(i)$ fois et on définit la préférence sociale $f(R^N)$ par*

$$x\ f(R^N)\ y \Leftrightarrow \sum n(i) \mid x\ R^i\ y > \sum n(i) \mid y\ R^i\ x$$

La structure de pouvoir définie à partir de cette règle est définie par : $E(S) = \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ si $\sum_{i\in S} n(i) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ et dans les autres cas $E(S) = \{A\}$.

Exemple 1.5 *Dans un profil R^N, chaque joueur $i \in N$ attribue un point $p_i(R^N, x)$ pour l'alternative $x \in A$ (1 pour la pire alternative et m pour la meilleure).*

Dans le profil R^N, on calcule la somme des points obtenus par chaque x, $P(R^N, x) = \sum_{i \in N} p_i(R^N, x)$ on garde celle qui obtient le plus de points. Donc $f(R^N)$ est définie comme suit :

$$x \; f(R^N) \; y \Leftrightarrow \sum_{i \in N} p_i(x) > \sum_{i \in N} p_i(y)$$

Ici, on peut supposer que $A = \{x_1, \ldots, x_m\}$ et si $\sum_{i \in N} p_i(x_k) = \sum_{i \in N} p_i(x_l)$, alors il y a une indétermination sur l'issue du jeu.

Le pouvoir qui découle de H ne dépend que du nombre de joueurs et du nombre des alternatives. Une coalition S qui compte s membres est effective pour bloquer tout $y \notin B$, pour $B \subset A$, si $B \; R^S y \; R^S \; (A \setminus B \cup \{y\})$ entraîne $y \notin H(R^N)$, i.e il existe $x \in A$ (ce qui est nécessairement dans B) tel que $P(x) > P(y)$. Pour une paire (S, B) et $y \notin B$, notons :

$$\mathcal{L}(S, B, y) = \left\{ R^N \mid B \; R^S \; y \; R^S \; (A \setminus (B \cup \{y\})) \right\}$$

Alors, une coalition S est effective pour un ensemble d'alternatives B si et seulement si

$$\min_{R^N \in \mathcal{L}(S,B,y)} \max_{x \in B} P(R^N, x) > \max_{y \notin B} \max_{R^N \in \mathcal{L}(S,B,y)} P(R^N, y) \tag{1.1}$$

Or, :

$$\max_{y \notin B} \max_{R^N \in \mathcal{L}(S,B,y)} P(R^N, y) = (m - b)s + m(n - s) \; ;$$
$$\min_{R^N \in \mathcal{L}(S,B,y)} \max_{x \in B} P(R^N, x) = m - bs + \left\lceil \frac{b+1}{2} n \right\rceil \; ;$$

alors :

$$s > n - \frac{1}{m} \left\lceil \frac{b+1}{2} n \right\rceil \tag{1.2}$$

Notons que si l'ensemble des alternatives ne compte que deux éléments, cette règle est identique au vote à majorité simple.

La répartition du pouvoir selon cette règle de vote est donc définie par $E(S) = \mathcal{P}_0(A)$ pour toute coalition S telle que $s \geq n - \lfloor \frac{n}{m} \rfloor + 1$ et S est effective pour un ensemble d'alternatives à b éléments si le nombre de joueurs de S, s satisfait l'équation 1.2. Pour les avantages du principe de rang par rapport au vote à majorité simple, études du cas de la présidentielle française de 2007, voir les travaux de Baujard Antoinette & al. (8).

Plus généralement, à une correspondance de choix social H, on peut associer une fonction d'effectivité E^H ou E^H_κ telle que

$$E^H(S) = \left\{ B \mid \exists R^S \text{ tel que } \forall Q^{N \setminus S}, \; H(R^S, Q^{N \setminus S}) \in B \right\} \; ;$$
$$E^H_\kappa(S) = \left\{ B \mid \forall R^N \in \mathcal{L}(A)^N, \; y \in A \setminus B : \; [B \; R^S \; y \; R^S \; A \setminus (B \cup \{y\})] \Rightarrow y \notin H(R^N) \right\}$$

Acquisition par la force

La force est un élément émanent d'un individu susceptible de modifier l'état d'un objet auquel la force est exercée. Un joueur ou une coalition a ainsi le pouvoir par la force s'il arrive à supprimer toutes les forces résistantes à ses objectifs. Nous la définissons de manière négative afin d'y inclure les jeux où les actions des autres n'ont aucun effet sur l'issue du jeu. Prenons l'exemple d'un jeu à deux joueurs $\{1,2\}$ tel que $\Sigma_1 = \{x_1,\ldots,x_n\}$ et $\Sigma_2 = \{y_1,\ldots,y_p\}$ et $\pi(x_k,y_l) = f(x_k), \forall k = 1\ldots n, l = 1\ldots p$. Ici, les moyens de 2 ne sont que nominaux et ses actions sont tous neutralisées. Il en est de même pour les jeux de correspondance de choix social où l'issue du jeu ne dépend que de la préférence d'un seul ou d'un petit groupe de joueurs.

Une autre manière de s'approprier du pouvoir par la force consiste à éliminer progressivement des actions adverses ou les actions pouvant nuire à l'objectif visé. Nous terminons ce paragraphe par l'exemple de la *boîte d'Edgeworth* où la logique du jeu permet à un joueur de parvenir à une position de suppression des actions de son partenaire.

Exemple 1.6 *Boîte d'Edgeworth*

Supposons que le joueur 1 maîtrise parfaitement les produits financiers alors que le joueur 2 ne connaît rien à ce sujet. Les états sociaux possibles sont des couples (a_1,a_2) tels que $a_1 + a_2 = \omega_1 + \omega_2$ où ω_i désigne la dotation initiale de i. En absence de toute structure, 1 peut exercer son avantage en matière de finance pour qu'il ait le pouvoir d'atteindre n'importe quelle issue sociale dont $(\omega_1 + \omega_2, 0)$ et que 2 est privé de pouvoir pour n'accepter que les propositions de 1.

1.2.3 Pouvoir, conflits et stabilités

La répartition du pouvoir dans une organisation détermine les positions prises par les joueurs ou les coalitions face à une situation donnée. Il est naturel de penser qu'une coalition, qui a le pouvoir de modifier le *statu quo*, veut un autre état social à condition que ce nouvel état social soit préféré contre l'état social initial, pour tous les membres de la coalition. Ainsi, la structure de pouvoir ne détermine pas seulement les moyens d'action des coalitions mais elle définit également la rationalité des actions prises par les coalitions. Plus naturellement ou naïvement,[2] une coalition qui n'agit pas contre une proposition qui lui déplaît alors qu'elle a le pouvoir de le faire est jugée non-rationnelle. Donc, les coalitions se comportent en sorte de s'*opposer tout simplement à toutes situations non préférées tant que ses moyens le lui permettent*. Cette version de la rationalité, qui est la plus étudiée en théorie des jeux coopératifs et coalitionnels, a été définie pour la première fois dans le format de la fonction d'effectivité par Hervé Moulin & Belzalel Peleg(32). Une version plus souple de la rationalité, qui est étudiée pour la première fois dans le format de la fonction d'effectivité par Hans Keiding & Razafimahatolotra D. (26) consiste à accepter le dialogue.

2. Mot que nous empruntons de Bertrand Tchantcho à la suite de nos discussions sur la forme de la rationalité

Une fois que le mode de rationalité ou de la rationalisation des comportements des joueurs est défini, la question de stabilité ou de non stabilité devient la question principale en fonction d'effectivité. Par exemple, une répartition de pouvoir qui laisse à une famille de coalitions de bloquer toutes les alternatives disponibles est un problème sérieux en matière de choix social. Pour illustration, reprenons E_β de l'exemple 1.2 et supposons que les préférences sont :

$$\begin{array}{cc} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_1 \\ x_3 & x_2 \\ R^1 & R^2 \end{array}$$

Comme $\{1\}$ a le pouvoir de bloquer l'alternative $\{x_3\}$ et $\{2\}$ a le pouvoir de bloquer $\{x_1, x_2\}$ alors dans ce profil aucune alternative est sans opposition, donc la société formée par $\{1, 2\}$ n'arrive pas à s'entendre sur ce que doit être l'issue du jeu.

Pour finir, reprenons l'exemple 1.3. Dans cet exemple, toute coalition ne contenant pas i_0 est privée de pouvoir, donc les propositions de i_0 ne risquent aucune opposition. Malgré cette stabilité, elle n'offre aucun moyen pour que d'autres joueurs agissent sans i_0. Cela nuit à la liberté, si *l'agir* est une expression de liberté, et risque d'altérer l'innovation et l'efficacité de l'organisation.

1.3 La fonction d'effectivité

Dans ce paragraphe, nous considérons la fonction d'effectivité en tant qu'objet mathématique. Toutefois, chaque définition est suivie d'une interprétation et de quelques discussions. Rappelons qu'une fonction d'effectivité associe à chaque coalition une famille d'ensembles qui décrit les limites de ses pouvoirs dans l'organisation. C'est-à-dire

Définition 1.1 *Une* fonction d'effectivité *est une fonction de $\mathcal{P}(N)$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ satisfaisant les conditions suivantes :*
(i) $E(\emptyset) = \emptyset$;
(ii) $\forall S \in \mathcal{P}(N) \setminus \{\emptyset\}$, $A \in E(S)$ *et* $\emptyset \notin E(S)$;
(iii) $E(N) = \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$.

Le premier axiome signifie qu'aucun état social ne se réalise tout seul alors que $\emptyset \notin E(S)$ suppose qu'aucune coalition ne peut rien faire à partir de rien. L'hypothèse $A \in E(S)$ pour toute coalition S signifie que sans aucun effort particulier de S, l'issue sociale est dans A, ce qui confirme également l'exhaustivité de l'ensemble des alternatives du modèle. La dernière hypothèse $E(N) = \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ signifie que l'organisation composée de N joueurs est souveraine ; elle ne dépend d'aucune force extérieure pour atteindre un de ses états sociaux.

Ainsi, la rationalité supposée par la fonction d'effectivité suppose qu'aucune coalition agit de manière imprévisible. L'état de la nature peut être décrit avant toutes les interactions et les joueurs respectent les limites de leurs pouvoirs dans une règle donnée. Par exemple, si la règle est un vote, chacun agit selon ses pouvoirs par rapport à la règle du vote, si la règle est la logique de domination des plus compétents, chacun agit dans les limites de ses compétences etc.

1.3.1 Des exemples de fonctions d'effectivité

La fonction d'effectivité simple. $\forall S \in \mathcal{P}_0(N)$, $E(S) = \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ ou $E(S) = \{A\}$. L'ensemble $\mathcal{W}(E) = \{S \mid E(S) = \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}\}$ s'appelle l'ensemble des coalitions gagnantes. Donc, pour connaître les propriétés d'une fonction d'effectivité simple, il suffit d'étudier la structure de $\mathcal{W}(E)$. Cette classe de jeu regroupe en outre tous les jeux de vote (une personne un vote ou un vote avec pondérations). La plupart des correspondances de choix social répartissent le pouvoir en jeu simple.

La fonction d'effectivité anonyme. $\forall S,\ T \in \mathcal{P}_0(N)$. $|S| = |T|$ entraîne $E(S) = E(T)$. C'est le nombre qui fait le pouvoir. Ce jeu contient les jeux de vote *une personne un vote* sans être une généralisation des jeux simples. L'avantage des deux anonymes aux jeux simples c'est sa possibilité de partager le pouvoir de manière non grossière : sans pouvoir ou plein pouvoir seulement.

La fonction d'effectivité neutre. $\forall S \in \mathcal{P}_0(N)$, $\forall B, C \in \mathcal{P}_0(A)$. $|B| = |C|$ entraîne $B \in E(S) \Leftrightarrow C \in E(T)$. Donc, les alternatives sont indistinguables. Par exemple, si l'issue sociale est une valeur monétaire, il suffit de connaître le contour supérieur pour décrire la totalité des pouvoirs des coalitions.

La fonction d'effectivité décomposable. Il existe deux jeux à utilités transférables normés (N, ν) et (A, ω) tels que $\forall S \in \mathcal{P}_0(N)$, $\forall B \in \mathcal{P}(A) : B \in E(S)$ si et seulement si $1 - \omega(B) \leq \nu(S)$. Cette fonction est définie à deux niveaux. Premièrement, on mesure les coalitions et les alternatives par des jeux à utilités transférables (N, ν) et (A, ω) respectivement. Le nombre $\nu(S)$ désigne la valeur de S alors que $1 - \omega(B)$ évalue la résistance de B, la quantité de valeur qu'il faut pour que B soit réalisé. Cette classe de jeu est la seule qui satisfait le *principe de révélation* [3] *du pouvoir* (35) : pour deux coalitions S, T, alors $E(S) \subset E(T)$ ou $E(T) \subset E(S)$. Cette classe contient les jeux simples, les jeux anonymes et neutres et les jeux additifs : le cas où ν et ω sont des mesures de probabilités (ou mesures bornées).

1.3.2 Quelles sont les structures dangereuses ?

Nous disons qu'une structure de pouvoir est dangereuse si elle permet à la formation d'une famille de coalitions qui empêche l'organisation de choisir une issue sociale rationnelle. Nous montrerons comment ces structures exposent l'organisation aux conflits.

Dans la suite, nous appelons $E-$ *configuration d'ordre r* tout $2r-$uplet $(S_1, \ldots, S_r, B_1, \ldots, B_r) \in \mathcal{P}_0(N)^r \times \mathcal{P}_0(A)^r$ tel que $B_k \in E(S_k),\ k = 1 \ldots r$. Si les coalitions sont deux à deux disjointes, on les note $(T_1, \ldots, T_r)$ et si les ensembles d'alternatives sont deux à deux disjoints, on utilise $(C_1, \ldots, C_r)$.

3. Le terme de *révélation* est utilisé par Otten & al. dans (35). C'est-à-dire que les coalitions sont ordonnées par leurs pouvoirs. Donc, pour une action donnée, on peut savoir quelles sont les coalitions qui en sont capables.

Cycle supérieur d'ordre r (J. Abdou (1982))(1)(5). C'est une $E-$ configuration d'ordre r, $(T_1, \dots, T_r, B_1, \dots, B_r)$ telle que pour tout $k \neq l$, $T_k \cap T_l = \emptyset$ et $B_1 \cap \dots \cap B_r = \emptyset$.

La famille $(T_1, \dots, T_r)$ est formée de coalitions deux à deux disjointes, donc sans joueurs communs qui pourront joueur le rôle d'intermédiaire entre ces différentes coalitions. L'égalité $B_1 \cap \dots \cap B_r = \emptyset$ entraîne que $B_1^c \cup \dots \cup B_r^c = A$ donc la famille $(T_1, \dots, T_r)$ peut bloquer la totalité des alternatives qui permettra à son tour que l'organisation n'ait aucune alternative sans objection.

Cycle inférieur d'ordre r (J. Abdou (1982))(1)(5). C'est une $E-$ configuration d'ordre r, $(S_1, \dots, S_r, C_1, \dots, C_r)$ telle que pour tout $k \neq l$, $C_k \cap C_l = \emptyset$ et $S_1 \cap \dots \cap S_r = \emptyset$.

Contrairement au cycle supérieur, $\cap_{k \in J} S_k$ peut ne pas être vide pour $J \subsetneq \{1, \dots r\}$. Donc, ces coalitions ont des joueurs intermédiaires mais aucun joueur ne joue ce rôle pour la famille $(S_1, \dots, S_r)$. Considérons par exemple un couple où la femme et l'homme sont également membres de leurs familles d'origine. Nous avons trois coalitions S_1, S_2, S_3 où S_1 désigne le couple, alors $S_1 \cap S_k \neq \emptyset$, $k = 1, 2$. Dans cet exemple, aucune personne n'est dans les trois coalitions, et cette absence d'intermédiaire expose $N = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ aux conflits. Plus généralement, la famille $(S_1, \dots, S_r)$ a la possibilité de bloquer la totalité des alternatives en sachant que $C_k \cap C_l = \emptyset$.

Cycle circulaire d'ordre r de taille c (Razafimahatolotra.D(2008), (50)). C'est une $E-$ configuration $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$ d'ordre r telle qu'il existe $(T_1, \dots, T_r)$ une partition de N, $(C_1, \dots, C_r)$ une partition de A et $c \leq r$ tels que pour tout $k = 1 \dots r$, $B_k = C_k \cup \dots \cup C_{k+c-1}$ et $S_k = T_{k+c} \cup \dots \cup T_{k-1}$.

Ce cycle est une généralisation des deux premiers. Il permet d'identifier particulièrement les conflits dans une organisation anonyme et neutre.

Cycle d'ordre r (H. Keiding (1985)(24)). C'est une $E-$configuration d'ordre r, $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$ telle qu'il existe $(C_1, \dots C_r)$ (sa base) une partition de A telle que $\forall J \subset \{1, \dots, r\}$, $\cap_{k \in J} S_k \neq \emptyset$ entraîne qu'il existe $\theta(J) \in J$ tel que $B_{\theta(J)} \cap C_k = \emptyset, \forall k \in J$.

La condition $\cap_{k \in J} S_k \neq \emptyset$ signifie qu'il existe un joueur qui jouerait le rôle d'intermédiaire entre les coalitions $S_k, k \in J$. Dans ce cas, l'une des coalitions, donc $S_{\Theta(J)}$, a le pouvoir de bloquer la réunion des ensembles d'alternatives qui ont été bloqués initialement par les S_k. Donc, à chaque fois que la famille de coalitions $(S_k)_{k \in J}$ admet un intermédiaire, on doit attribuer à l'une d'entre elles les pouvoirs de tous les $S_k, k \in J$. L'existence de cycle est à la fois nécessaire et suffisante pour que l'organisation n'ait aucune issue sociale rationnelle.

1.3.3 Comment pousser au désordre ?

Pour déstabiliser une organisation, il faut considérer deux choses : les pouvoirs des coalitions et les préférences des joueurs. Pour illustration, considérons les exemples suivants :

Exemple 1.7 *Soit $N = \{1, \ldots, n\}$ une organisation où la position x n'est désirable pour personne, et supposons que cette organisation doit désigner un joueur à la position x. L'issue sociale est donc de la forme "i assure la fonction x". Donc, $A = N$.*

Considérons les deux modes d'attributions de pouvoirs suivants :
1− On donne à chaque joueur le moyen d'éviter la position x ;
2− On donne à la coalition $N \setminus \{i\}$ le pouvoir de désigner i.
La distribution du pouvoir dans 1 est définie par $\forall i \in N,\ E_1(\{i\}) = \{N \setminus \{i\}, N\}$ et celui de 2, $E_2(N \setminus \{i\}) = \{S \subset N \mid S \ni i\}$. Avec la première forme d'organisation, pourvu que $\{i\}$ soit la pire alternative de i alors personne n'est désignée. Ainsi, l'issue sociale est vide. Avec la deuxième forme, si les membres de $N \setminus \{i\}$ arrivent a se mettre d'accord pour désigner i, alors l'issue sociale n'est pas vide car $\{i\}$ n'a aucun pouvoir pour faire objection à cette proposition. Pourtant, dans le profil montré dans le tableau suivant, l'organisation 2 tombe dans le conflit :

$$\begin{array}{ccccc}
n & \ldots & n-1 & \ldots & n-1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
2 & \ldots & i+1 & \ldots & 1 \\
1 & \ldots & i & \ldots & n \\
R^1 & \ldots & R^i & \ldots & R^n
\end{array}$$

Un tel profil existe mais il n'est pas évident que les joueurs rangent les alternatives de cette façon.

Exemple 1.8 *Contrairement à l'exemple 1.7, supposons que la fonction y est désirable. On a toujours $N = A = \{1, \ldots, n\}$*

Pour que cette société s'expose facilement aux conflits, on donne à au moins deux coalitions le pouvoir de prendre la fonction y. Dans le cas extrême, soit E_3 la fonction où chaque $i \in N$ a le moyen de sélectionner la fonction y. Dans ce cas, il suffit que deux joueurs se disputent y pour que la société toute entière soit bloquée. Si nous comparons E_1 avec E_3, nous observons que tous les deux possèdent des cycles supérieurs mais E_1 ne peut être troublée par des $p-$coalitions ($p < n$) alors que E_3 perd sa stabilité avec seulement deux coalitions, ou même deux joueurs. En outre, E_1 ne possède qu'un seul cycle alors que E_3 en possède plusieurs. Ainsi, le degré de manipulation d'une organisation, dans le sens de pousser des joueurs à agir comme on le souhaite, dépend de trois paramètres : la structure, l'ordre minimal et le nombre des cycles de l'organisation.

Les exemples 1.7 et 1.8 sont dans une situation où l'on connaît la structure des préférences des joueurs. On connaît également les sujets sur lesquels ils se disputent et risquent de se mettre en désaccord. Cette information cumulée avec la connaissance de la structure du pouvoir permet alors d'entreprendre une manipulation contre la stabilité de l'organisation. Cependant, il est possible de pousser l'organisation au désordre permanent si l'on connaît le profil de joueurs, en jouant sur la répartition des pouvoirs, ou si l'on connaît la répartition des pouvoirs en jouant sur les profils. En effet, on peut ajouter des alternatives fictives ou réelles par rapport auxquelles les attentes entre les joueurs sont difficiles.

1.3.4 Comment réguler une organisation ?

Le mot "régulation" fait entendre une intervention supprimant certaines actions ou certains moyens pour orienter le fonctionnement d'une organisation. Dans son usage avec la fonction d'effectivité, la régularité est définie par l'absence de deux coalitions disjointes qui ont le pouvoir de bloquer ensemble la totalité des alternatives. Le mot "régulier" (dont nous faisons usage ici) fait référence à une politique qui fait passer une organisation d'une structure plus exposée aux conflits à une structure moins exposée à ce problème, voire stable. La question comment réguler signifie donc "Comment fixer les pouvoirs pour éviter ou minimiser les conflits" ?. Dans un premier temps, nous décrivons les propriétés qui contribuent à la régulation d'une structure de pouvoir. Ensuite, nous donnerons les relations entre ces propriétés et la stabilité.

Des propriétés régulatrices

Régularité. $\forall S, T \in \mathcal{P}_0(N)$, $\forall B, C \in \mathcal{P}_0(A)$, $B \in E(S)$ et $C \in E(T)$ entraîne $B \cap C \neq \emptyset$ ou $S \cap T \neq \emptyset$.
Cette propriété empêche qu'il y ait deux pouvoirs qui s'excluent mutuellement. C'est-a-dire qu'une coalition est capable d'exclure une partie des alternatives tandis qu'une autre, disjointe avec la première, est capable d'exclure l'ensemble des alternatives restantes. En cas de non-régularité, l'organisation tombera facilement dans une situation de conflits. En effet, il suffit que tous les membres de S préfèrent les alternatives de B à celles de C, et que tous les membres de T fassent l'inverse.

Sur-additivité. $\forall S, T \in \mathcal{P}_0(N)$, $\forall B, C \in \mathcal{P}_0(A)$ tels que $S \cap T = \emptyset$. $B \in E(S)$ et $C \in E(T)$ entraîne $B \cap C \in E(S \cup T)$ (en particulier $B \cap C \neq \emptyset$).
La sur-additivité est plus restrictive que la régularité. H. Moulin l'interprète comme signifiant "L'union fait la force" car le pouvoir de deux coalitions auparavant disjointes est au moins équivalent à la réunion de leurs pouvoirs respectifs. Toutefois, elle n'est ni nécessaire ni suffisante pour que E soit stable. Elle contribue seulement à la régulation des conflits et permet d'éviter les situations comme celles du cas de la non-régularité.

Sous-additivité. $\forall S, T \in \mathcal{P}_0(N)$, $\forall B, C \in \mathcal{P}_0(A)$ tels que $B \cap C = \emptyset$. $B \in E(S)$ et $C \in E(T)$ entraîne $B \cup C \in E(S \cap T)$. (En particulier $S \cap T \neq \emptyset$).
La sous-additivité prescrit que *chaque coalition est faible ou possède une sous coalition à l'origine de son pouvoir*. En effet, soit S une coalition effective pour B. Si, pour tout $T \in \mathcal{P}_0(N)$ et pour tout $B \in E(T)$, nous avons $B \cap C \neq \emptyset$, alors l'exercice de B ne garantit aucun pouvoir à S. Si au contraire, il existe une coalition T effective pour C, $C \cap B = \emptyset$. Alors, $S \cap T \subset S$ est effectif pour $B \cup C$. Donc, $S \setminus T$ ne fait que raffiner $B \cup C$ pour avoir B. Comme la sur-additivité, la sous-additivité n'est ni nécessaire ni suffisante pour la stabilité, mais elle contribue à la régulation des conflits, et permet d'éviter les conflits triviaux comme dans l'irrégularité.

$\star$−sur-additivité $\forall S, T \in \mathcal{P}_0(N)$, $\forall B, C \in \mathcal{P}_0(A)$ tels que $S \cup T = N$. $B \cup C \in E(S \cap T)$ entraîne $B \in E(S)$ ou $C \in E(T)$.
Si on pose $Q = S \cap T$ et $D = B \cup C$, alors les membres de Q a le moyen de raffiner son pouvoir, soit par l'union avec $S \setminus Q$ pour atteindre B, soit

par l'union avec $T \setminus Q$ pour atteindre C. D'une autre manière, l'$\star-$sur-additivité peut être interprétée comme une réponse à une quête sur la source du pouvoir de Q. Pour un jeu $\star-$sur additif, la force de l'union ne dépasse pas l'union de la force (Abdou).

$\star-$sous additivité $\forall S, T \in \mathcal{P}_0(N)$, $\forall B, C \in \mathcal{P}_0(A)$ tels que $B \cup C = A$. $B \cap C \in E(S \cup T)$ entraîne $B \in E(S)$ ou $C \in E(T)$.

Convexité. $\forall S, T \in \mathcal{P}_0(N)$, $\forall B, C \in \mathcal{P}_0(A)$. $B \in E(S)$ et $C \in E(T)$ entraîne $B \cap C \in E(S \cup T)$ ou $B \cup C \in E(S \cap T)$.
Un jeu convexe est régulier, sur-additif et sous additif. Il satisfait non seulement que l'union fait la force, mais également que plus on agrandit, plus les gains marginaux sont grands. De même, l'interprétation de la sous-additivité est renforcée pour la convexité. En outre, la convexité est la seule propriété à la fois mathématiquement simple et suffisante pour la stabilité. Toutefois, dans la plupart des cas, elle n'est pas nécessaire. Dans le cas extrême de la convexité, on peut avancer l'interprétation suivante : ou bien E donne des pouvoirs faibles aux coalitions propres (sous-ensembles stricts de N) ou bien E devient oligarchique. Bref, la convexité n'est pas une répartition idéale des pouvoirs pour assurer à la fois la stabilité et les libertés des joueurs.

$\star-$convexité. $\forall S, T \in \mathcal{P}_0(N)$, $\forall B, C \in \mathcal{P}_0(A)$ tels que $S \cap T \neq \emptyset$ et $B \cap C \neq \emptyset$. $B \cap C \in E(S \cup T)$ et $B \cup C \in E(S \cap T)$ entraîne $B \in E(S)$ ou $C \in E(T)$.
Contrairement à la convexité, un jeu $\star-$convexe satisfait la propriété de *décentralisation du pouvoir*. Plus la taille de la coalition s'agrandit, plus les gains marginaux sont petits. Il pousse les joueurs à participer sitôt que possible dans le jeu. L'$\star-$convexité ne contribue pas à la régulation des conflits car les pouvoirs sont éparpillés. Toutefois, sa condition de stabilité permet un contrôle facile pour éviter les conflits.

Maximalité. $\forall S \in \mathcal{P}_0(N)$, $\forall B \in \mathcal{P}(A)$, $B \notin E(S) \Rightarrow A \setminus B \in E(N \setminus S)$.
Cette propriété prévoit que si une coalition S n'est pas effective pour B, alors son complémentaire aura le pouvoir de le bloquer. D'une autre manière, si une coalition est faible, pour éviter la perte inutile des actions possibles, on donne à son complémentaire le droit d'agir. La maximalité ne contribue en rien à la stabilité. Dans le cas où la structure de pouvoir est déjà instable, la maximalité intensifie la vulnérabilité de la société aux conflits car elle donne la permission d'agir aux coalitions dont les complémentaires ne sont pas en mesure de mener l'action. Cependant, elle aide à la mise en évidence des conflits d'origine structurelle.

Les moyens de régulation

a) Agir sur l'allocation du pouvoir

Cette politique de régulation consiste à agir directement sur la répartition du pouvoir. Il ne s'agit pas toutefois de contraintes explicites ou de politiques contraignantes mais d'une mise en place d'une distribution de pouvoir satisfaisant une ou plusieurs des propriétés de la régularité. La proposition suivante, par exemple, donne une condition pour éviter les cycles supérieurs et inférieurs.

Proposition 1.1 (J. Abdou (1982) (1)) *Soit* $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ *une fonction d'effectivité. Alors :*
(i) *Si E admet un cycle supérieur ou inférieur, alors E a un cycle ;*
(ii) *Une fonction d'effectivité sur-additive n'admet aucun cycle supérieur ;*
(iii) *Une fonction d'effectivité sous-additive n'admet aucun cycle inférieur.*

Donc, il n'est pas possible de déstabiliser une société par un cycle supérieur si tous les membres jouent selon le principe de "l'union fait la force". Si en outre, les joueurs intermédiaires $(S \cap T)$ ont le pouvoir de bloquer l'intersection $(B^c \cap C^c)$ des alternatives bloquées par les deux coalitions, alors la société n'est jamais manipulable. Formellement,

Théorème 1.1 *(B.Peleg & H.Moulin(21)). Soit* $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ *une fonction d'effectivité. Alors :*
(i) *Si E est sur et sous additif, alors E est convexe ;*
(ii) *Si E est convexe, alors E est stable.*

La convexité d'une organisation signifie que les joueurs n'ont aucun intérêt à agir seul ou à s'intégrer dans les petits groupes car ils auront plus de pouvoir dans les grandes coalitions. De manière négative, cela signifie que les petits groupes n'ont aucune possibilité de se former en cycle, et plus généralement n'ont que des pouvoirs faibles. Ce problème oblige donc à faire un arbitrage entre la stabilité et l'attribution du pouvoir. Ici, le souci de la stabilité a tendance à donner moins de pouvoir aux coalitions, alors que ce dernier conduit à la privation des moyens à certains acteurs. Pour éviter les pertes inutiles des moyens d'actions et les pouvoirs non nécessaires, H. Keiding propose la condition suivante :

Théorème 1.2 (H. Keiding (1985)(24)) *Soit* $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ *une fonction d'effectivité. Alors E est stable si et seulement si elle ne possède aucun cycle.*

Le cycle est une notion moins intuitive et difficile à surveiller pour une organisation à grand nombre de joueurs. La possibilité de l'écrire plus simplement offre donc un moyen qui facilite la surveillance des pouvoirs qui peuvent provoquer inutilement le désordre. Elle permet également de contrôler l'attribution des pouvoirs non déployés sans nuire à la stabilité. La procédure qui répond à cette seconde condition consiste à donner aux coalitions, dont les complémentaires sont incapables de forcer l'issue sociale à être un élément de B, le moyen de bloquer les alternatives dans B. C'est-à-dire : la fonction devient maximale. Dans ce cas, l'ordre minimal des cycles est 2 ou 3 (3). La simplification des surveillances des dérives du pouvoir est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.3 *Soit $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité maximale. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) *E ne possède ni cycle inférieur ni cycle supérieur ;*
(2i) *E ne possède aucun cycle circulaire ;*
(3i) *E ne possède aucun cycle ;*
(4i) *E est sur-additive et sous-additive ;*
(5i) *E est convexe ;*
(6i) *E est stable.*

Un autre moyen pour faciliter la surveillance de la structure du pouvoir consiste à adopter le principe de symétrie ou de l'anonymat des joueurs. Dans ce cas, si le pouvoir est neutre par rapport aux alternatives, nous avons :

Théorème 1.4 *Soit $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité monotone anonyme et neutre. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) *E ne possède aucun cycle circulaire ;*
(2i) *E ne possède aucun cycle ;*
(3i) *E est stable.*

b) Agir sur l'espace des actions

Cette politique consiste à gérer la structure de pouvoir via la modification de l'espace de stratégies des joueurs. Ce changement peut rester au niveau de l'espace de stratégies mais peut également modifier l'ensemble des états sociaux, conséquence des stratégies conjointes. Reprenons l'exemple 1.2. L'éviction des conflits dans E_β peut se faire soit par la précision des textes par rapport aux différentes circonstances, soit par la souplesse de la mise en application de la loi. La mise en place des alternatives de dernier recours qui échappent au veto est aussi une solution qui peut minimiser les conflits.

c) Agir sur le choix des règles

Si le pouvoir vient d'une correspondance de choix social H, il est naturel que toute régulation sur E^H passe par H. Reprenons l'exemple 1.5 et supposons que $\forall k = 3 \ldots m; P(x_k) < P(x_1) = P(x_2)$. Donc, l'issue sociale est un élément de $\{x_1, x_2\}$. Pourtant, dans le profil détaillé du tableau suivant, x_1 et x_2 admettent des objections :

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\ldots & & & & & \ldots & x_1 & \ldots & x_1 \\
\ldots & & & & & \ldots & x_l & \ldots & x_2 \\
\ldots & & & & & \ldots & x_2 & \ldots & x_2 \\
\vdots & & & & & \vdots & & & \vdots \\
x_2 & \ldots & x_2 & x_k & \ldots & x_k & \vdots & \vdots & \vdots \\
x_3 & \ldots & x_3 & x_3 & \ldots & x_3 & \vdots & \vdots & \vdots \\
x_1 & \ldots & x_1 & x_1 & \ldots & x_1 & \vdots & \vdots & \vdots \\
x_k & \ldots & x_k & x_2 & \ldots & x_2 & x_3 & \ldots & x_3 \\
R^1 & \ldots & R^{n-q} & R^{n-q+1} & \ldots & R^q & R^{q+1} & \ldots & R^n
\end{array}
$$

On peut vérifier que $P(x_1) = P(x_2) > P(x_3)$ et $(\{1, \ldots, q\}; \{x_3\})$

est une objection contre x_1 et $(\{n-q+1,\ldots,n\},\{x_1\})$ est une objection contre x_2. Ici, les pouvoirs alloués par H n'assurent pas la stabilité des alternatives sélectionnées. Pour qu'une telle éventualité ne se produise pas, il faut que H satisfasse les conditions du théorème suivant :

Théorème 1.5 (H. Keiding & Razafimahatolotra D. (2008)) *Soit $H : \mathcal{L}(A) \longrightarrow A$ une correspondance de choix social. Si H satisfait les conditions* (i), (ii), (ii) *suivantes, alors* $H = \mathcal{C}(E^H_\kappa, .)$
(i) $\forall R^N \in \mathcal{L}(A)^N; x, y \in A,\ \ x\ R^N\ y \Rightarrow y \notin H(R^N)$;
(ii) $\forall R^N \in \mathcal{L}(A)^N; x, y \in A$, *si* $y \notin H(R^N)$ *et* Q^N *est obtenu de* R^N *en améliorant* x, *alors* $y \notin H(Q^N)$;
(iii) $\forall R^N \in \mathcal{L}(A)^N, y \notin H(R^N)$, *il existe* $S \in \mathcal{P}(N) \setminus \{\emptyset\}$ *et* $B = \{x \mid x\ R^S\ y\}$ *tel que* $\forall Q^S \in \mathcal{L}(A)^S$, $[B\ Q^S\ y\ Q^S\ (A \setminus B \cup \{y\})] \Rightarrow y \notin H\left(Q^S, R^{N\setminus S}\right)$.

La première condition, la condition de Pareto, signifie que si tous les joueurs préfèrent x à y, alors y ne sera pas l'issue finale du jeu. La condition (ii), qui porte le nom d'antimonotonie, signifie que si y n'est pas le *statu quo* et qu'aucun joueur n'améliore le rang de y, alors y ne sera pas l'issue du jeu. La condition (iii) signifie que pour chaque y en dehors de l'issue du jeu, il existe au moins une coalition S et un ensemble d'alternatives B tels que si S est déterminé à exclure y via B, alors quelque soit le $(N \setminus S)-$profil des joueurs restants, y restera en dehors des issues du jeux.

1.3.5 Peut-on localiser l'issue sociale stable ?

Les conditions de stabilité que nous avons étudiées nous permettent d'affirmer que l'organisation est stable, mais elles ne donnent aucune indication sur l'issue sociale. Reprenons l'exemple 1.5 avec une version simplifiée :

Exemple 1.9 *Supposons que $N = \{1,\ldots,n\}$ va choisir l'un des trois candidats x_1, x_2, x_3 avec la règle de l'exemple 1.5*

Il y deux façons avec des procédures différentes pour déterminer l'issue sociale de ce jeu qui est stable. Premièrement, on connaît les préférences et on décompte les points obtenus par chaque candidat selon la règle déjà fixée. Deuxièmement, on connaît les coalitions qui décident de faire objection contre tel ou tel candidat. Dans le premier cas, supposons que les préférences soient données par $\forall i = 1\ldots\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$; $R^i = R^a$ et $\forall i = \lfloor\frac{n}{2}\rfloor + 1\ldots n$; $R^i = R^b$ où

$$\begin{array}{cc} x_3 & x_1 \\ x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 \\ R^a & R^b \end{array}$$

Le comptage des points des trois candidats donne l'élection de x_3. En effet,

$$P(x_2) = 3\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,\ P(x_1) = 4\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,\ P(x_3) = 5\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$$

Dans le deuxième cas, supposons que les membres de $S_1 = \{1, \ldots, n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1\}$ ont l'intention de voter pour x_3. Cela peut se traduire par une objection de S_1 contre x_2 ou contre x_1 via l'élection de x_3. Admettons que les joueurs restants ne soient pas regroupés en coalition pour faire opposition contre un candidat, alors l'intersection des ensembles des candidats qui ont obtenu une intention de vote vaut $\{x_3\} \cap A = \{x_3\}$, donc x_3 sera élu. Maintenant, supposons que les membres d'une coalition S_2 de taille $n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1$, par exemple $S_2 = \{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1, \ldots, n\}$, ont une intention de vote pour x_2. Donc, les joueurs dans $\{n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1, \ldots, n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1\}$ ont deux intentions différentes de votes : x_3 et x_2. Ces intentions ne se transforment en réelles oppositions que si l'un des deux candidats est moins préféré que l'autre par tous les joueurs. Dans ce cas, l'intention de vote des membres de $\{1, \ldots, \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 2\}$ est $\{x_3\}$, celle des membres de $\{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1, \ldots, n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1\}$, $\{x_3, x_2\}$ et celle des membres de $\{n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 2, \ldots, n\}$ est $\{x_2\}$. Ainsi, si B_k désigne l'intention de vote de S_k, l'ensemble des candidats qui obtiendront l'intention de vote de tous les joueurs est un élément de

$$\bigcap_{i \in N} \bigcup_{k | S_k \ni i} B_k = \{x_2\} \cap \{x_2, x_3\} \cap \{x_3\} = \emptyset \tag{1.3}$$

Cette indétermination provient de la structure des coalitions qui décident de manifester leurs intentions ou propositions.

Le théorème suivant nous montre que, si la famille $(S_1, \ldots, S_r)$ vérifie la condition de la partition généralisée, alors l'intersection dans l'équation 1.3 est en relation étroite avec la stabilité.

Rappel. *Une famille d'ensembles $(S_1, \ldots, S_r)$ est une partition généralisée seulement s'il existe $(\lambda_k)_{k=1\ldots r}$, $0 < \lambda < 1$ tel que $\forall i \in N$, $\sum_{k|S_k \ni i} \lambda_k = 1$*

A partir de cette structure qui est une généralisation des partitions, on définit :

Une structure de déséquilibre d'ordre r. Une structure de déséquilibre d'ordre r, $(S_1, \ldots, S_r, B_1, \ldots, B_r)$ est une $E-$configuration telle que $(S_1, \ldots, S_r)$ soit une partition généralisée et la famille $(B_1, \ldots, B_r)$ satisfasse

$$\bigcap_{i \in N} \bigcup_{k | S_k \ni i} B_k = \emptyset \tag{1.4}$$

Théorème 1.6 (Kolpin, 1990(27)) *Soit $E : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité. Si E est instable, alors il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que E possède une structure de déséquilibre d'ordre r.*

Supposons que la famille de coalitions qui ont manifesté leurs intentions de vote est $(S_1, \ldots, S_4)$ telle que $S_1 = \{1, \ldots, q\}$, $S_2 = \{q+1, \ldots, 2q\}$ $S_3 = \{2q+1, \ldots, 3q\}$ et $S_4 = \{3q+1, \ldots, n\}$ où $q = n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1$. Chaque joueur $i \in N$ est membre de 3 coalitions de $\{S_1, \ldots, S_4\}$ donc avec $(\lambda_1, \ldots, \lambda_4) = (\frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{3})$, $(S_1, \ldots, S_4)$ est une partition généralisée. Si S_1 vote pour x_3 et S_2 pour x_2 alors la linéarité des préférences et l'appartenance de tous les $i \in N$ à au moins trois coalitions entraînent que S_3 et S_4 voteront pour x_3 ou x_2. Si tous les deux votent pour x_k, $k = 1, 2$ alors le candidat $x_k = \{x_3, x_2\} \cap \{x_3, x_k\} \cap \{x_2, x_k\} \cap \{x_k\}$ est élu. Si S_3 et S_4 votent pour différents candidats, il y a indétermination sur le candidat élu car $\{x_3, x_2\} \cap \{x_3, x_k\} \cap \{x_2, x_l\} \cap \{x_k, x_l\} = \{x_2, x_3\}$.

Cette condition n'est pas nécessaire en général, (cf (30) pour un contre exemple) mais pour quelques classes de fonctions d'effectivité, elle est à la fois nécessaire et suffisante.

Théorème 1.7 (Mizutani,1994) *Soit $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité monotone, anonyme et neutre. Alors E est stable si et seulement si elle est équilibrée.*

Théorème 1.8 *Soit $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité monotone. Si E est simple ou maximale, alors E est stable si et seulement elle est équilibrée.*

Rappel. *Une sélection sur un ensemble $\{1, \ldots, r\}$ est une fonction θ : $\mathcal{P}(\{1, \ldots, r\}) \longrightarrow \{1, \ldots, r\}$ telle que $\forall K \subset \{1, \ldots, r\}$, $\theta(K) \in K$.*

Acyclicité r. Une $E-$configuration $(S_1, \ldots, S_r, B_1, \ldots, B_r)$ est un cycle si et seulement s'il existe une sélection $\theta : \mathcal{P}(\{1, \ldots, r\}) \longrightarrow \{1, \ldots, r\}$ telle que si $\mathcal{J}_k = \{J \mid k \in J \text{ et } \cap_{l \in J} S_l \neq \emptyset\}$, alors :

$$\bigcap_{k=1}^{r} \bigcup_{J \in \mathcal{J}_k} B_{\theta(J)} = \emptyset$$

Cette structure est une version améliorée en termes de stabilité de l'équilibre du pouvoir. Une fonction d'effectivité acyclique, qui ne possède aucun r, est stable. Inversement, une fonction d'effectivité instable possède un cycle d'ordre r.

Théorème 1.9 (Keiding, (1985)(24)) *Soit $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité. Alors E est instable si et seulement s'il existe r tel que E ait un cycle d'ordre r.*

En conclusion, les deux informations suivantes sont utiles pour une résolution structurelle des conflits :
1- Comment le pouvoir est-il réparti entre les joueurs ?
2 - Quelles sont les tendances préférentielles des différents acteurs ?
Si l'on connaît la première, on peut prévoir les $E-$configurations qui pourraient provoquer le désordre, et si l'on connaît la seconde, on peut déterminer les structures de pouvoir qui favorisent le désordre.

1.4 Conclusion

La fonction d'effectivité offre un instrument de politique de gestion de pouvoir dans une organisation. Son développement reste jusqu'à présent au niveau des mathématiques et de ses interprétations. Quelques auteurs ont tenté de proposer des programmes informatiques pour certains résultats mais présentement, aucun résultat exploitable n'est encore disponible. Au niveau calculatoire, telle que la formulation des effectivités des correspondances du choix social, le problème reste encore ouvert. Il en est de même pour la formulation des effectivités des formes de jeux calculables.

2 Les cycles et la forme des conflits dans les fonctions d'effectivité

Un cycle, une situation dans laquelle toutes les issues sociales sont opposables, est caractérisé par son ordre et par sa forme. Si l'ordre minimal des cycles, qui correspond au nombre de coalitions nécessaires pour que toutes les issues sociales soient opposables, est un indicateur d'instabilité, la forme des cycles quand à elle donne de l'information sur la structure des coalitions contestataires. L'identification des coalitions potentiellement contestataires est d'autant plus facile que la structure des cycles de la fonction d'effectivité est mathématiquement simple. Ainsi, ce travail qui est consacré à l'étude de la forme des cycles, démontre que, pour les fonctions d'effectivités simples, les fonctions d'effectivité maximales et les fonctions d'effectivité anonymes et neutres, tous les cycles ont une propriété circulaire.

Mots-clés : Cycle circulaire, structure des cycles, ordre des cycles, pouvoir.

JEL Classification : C71, C79.

AMS classification : 91A12

2.1 Introduction

Une organisation est un ensemble d'acteurs agissant selon la structure du pouvoir et la distribution des autorités. La connaissance de la structure de pouvoir d'une organisation permet d'anticiper aussi bien les issues du jeu que les éventuels conflits entre les parties prenantes. Nous admettons ici que le conflit est une situation où, à l'issue de la procédure du jeu (négociation, exercices respectifs des droits, règle de vote, etc.), aucune alternative n'est sélectionnée. Le conflit a une relation évidente avec les préférences des membres d'une organisation mais les distorsions de préférences en cas de conflits sont évitables si les pouvoirs sont bien répartis entre les joueurs. Au cours de ces travaux, nous analysons les conditions de possibilité et la forme de ces désaccords en fonction de la structure du pouvoir. Il y a plusieurs représentations théoriques qui abordent ces questions, mais nous présentons la classe de théories qui la considère comme un problème de choix social et celle qui la traite comme un problème de pouvoir et de décision.

En théorie du choix social, les issues sociales découlent d'une règle d'association des préférences des joueurs. Le vote à majorité simple est un exemple typique où chaque joueur a une voix, et l'issue sociale est celle qui obtient la moitié des voix plus une. D'autres règles plus sophistiquées sont étudiées en détails dans Van Deemen (59). Dans la plupart des cas, ces règles tranchent les groupes d'acteurs en deux catégories diamétralement opposées : plein pouvoir et sans pouvoir. Cette classification des coalitions en gagnantes $-$ non gagnantes suscite des critiques aussi bien d'ordre pratique que d'ordre épistémique. D'ordre pratique car toutes coalitions ne satisfaisant pas les conditions de la règle sont exclues de la sphère de la décision, et d'ordre épistémique car une structure de pouvoir et des autorités formalisée en règle de décision ne permettent pas de rendre compte du problème de contraste entre pouvoir réel et pouvoir formel. Par exemple, le pouvoir formel est celui décrit par la loi, ou par les conventions explicites consenties par les parties prenantes, tandis que le pouvoir réel décrit ce qui est observé. Pour apporter une solution au premier problème, H. Moulin dans (31), (33) suggère le principe du proportionalisme : une coalition à s membres (s est un entier) a le droit de s'opposer contre $b(s)$ alternatives, $b(s)$ est un entier relativement proportionnel à s. Plus précisément, $b(s) = \lceil s\frac{m}{n} \rceil$, m le nombre des alternatives, n le nombre de joueurs et $\lceil x \rceil = \min \{n \in \mathbb{N} \mid x \leq n\}$. Cette solution a été conçue pour les organisations où les acteurs sont interchangeables et les alternatives sont permutables, mais les travaux récents de D. Razafimahatolotra (48) montrent que cette idée peut être généraliser pour une classe de jeux plus générale. Le problème épistémique posé par les règles de choix social est plus délicat que le problème d'ordre pratique car il concerne le bon fonctionnement de l'organisation : un écart trop important entre la structure formelle et la structure réelle du pouvoir peut nuire à la crédibilité des autorités et à l'effectivité des pouvoirs des coalitions. Ce problème, posé par Aghion & Tirole (7) comme problème de contraste entre les autorités réelles et les autorités formelles, a été développé récemment par Emmanuel Picavet & Razafimahatolotra D. (44), (45) dans le contexte de l'étude de la distribution du pouvoir dans une organisation. Nous ajoutons à ces limites de la représentation du pouvoir en règle de choix social la conclusion de nos observations des travaux de formalisation sur les constitutions. L'attribution du pouvoir est généralement non implémentable par une correspondance de choix social ; par exemple B. Peleg (39), ou Vannucci (62) (36), Van Hees (60), E. Picavet (43) ou E. Picavet & D. Razafimahatolotra (44).

La deuxième représentation s'appuie sur la théorie des jeux coopératifs : un couple (N, v) tel que N représente l'ensemble des joueurs et v est une fonction qui associe à chaque sous ensemble de N un nombre réel positif. Elle met en valeur les pouvoirs des coalitions pour expliquer le mécanisme de décision et pour rendre compte des jeux d'influences entre parties prenantes d'une organisation. Les pouvoirs des joueurs, donc des coalitions, sont mesurés par des *indices de pouvoir* dont les plus connus sont ceux de Banzhaf (13), (23), (14), (18) et de Shapley-Shubik (52), (53), (54), (65). L'indice de Shapley repose sur l'hypothèse normative que chaque joueur a un pouvoir proportionnel à la moyenne marginale de ses influences potentielles, par exemple dans Young (65), tandis que l'indice de Banzhaf évalue le pouvoir d'un acteur dans un système d'élection à deux niveaux, voir (18) pour son axiomatisation. Beaucoup de critiques se sont levées contre ces indices par leurs manques de pertinence par rapport aux observations des faits et des résultats des études statistiques sur le mécanisme du pouvoir. Les travaux récents de Vincent (63) montrent par exemple que même pour une élection à deux niveaux comme celle des États Unis, l'indice de Banzhaf enregistre trop d'erreurs d'estimation.

La troisième représentation repose sur la théorie des jeux coalitionnels : un couple (N, E) tel que N représente l'ensemble des joueurs et E une fonction qui associe à chaque coalition une famille d'ensembles, qui sont des sous-ensembles de l'ensemble des alternatives. En 1982, pour généraliser le principe du veto proportionnel, Moulin & Peleg (32) ont introduit la notion de fonction d'effectivité pour représenter la structure du pouvoir dans ses formes les plus générales. Une fonction d'effectivité ou correspondance de veto décrit les pouvoirs effectifs des coalitions. Un ensemble d'alternatives B fait parti de l'effectivité d'une coalition S si celle-ci a le pouvoir de forcer l'issue sociale pour être un élément de B, donc elle a le pouvoir de bloquer les alternatives en dehors de B. Cette description ouvre de nouvelles catégories de problèmes dans une organisation.

Premièrement, elle permet de définir " *la rationalité ou la rationalisation du choix social*", voir par exemple les travaux de H. Keiding & Razafimahatolotra D. (25). Selon la définition adoptée par Moulin & Peleg dans (32), une coalition est rationnelle au travers de l'usage de son pouvoir si elle lève son objection contre tout état social en désaccord avec les préférences de ses membres ; pourvu qu'elle a le moyen de réaliser cet éviction. Malgré que la quasi-totalité des travaux sur les effectivités adopte cette définition, cette acceptation est loin d'être unanime car la notion de rationalité peut être définie par rapport au profil des joueurs, par rapport aux résultats voulus ou par rapport à d'autres observables sociaux. La rationalité selon laquelle l'usage du pouvoir se fait par la négociation ou le marchandage est l'objet des travaux de Keiding H. & Razafimahatolotra D. (26) et Razafimahatolotra D. (49).

Deuxièmement, la notion de fonction d'effectivité offre d'autres avantages comme l'unification de l'approche stratégique et de l'approche coalitionnelle de la théorie des jeux, ce qui définit le problème de l'implémentation. Voir par exemple les travaux de J. Abdou (2), (6) ou l'ouvrage de J. Abdou & H. Keiding (5), ou les travaux de B. Peleg, de Ishiishi et tant d'autres. La fonction d'effectivité nous permet donc d'aborder la question de stabilité versus conflit dans une organisation comme un problème à la fois structurel et préférentiel. Elle permet d'identifier les limites des pouvoirs respectifs des coalitions pour préserver la stabilité, et permet également de caractériser les stratégies génératrices de conflits et les manipulations malveillantes des règles de choix social.

La formalisation d'une organisation en fonction d'effectivité nous permet donc de considérer le pouvoir comme des conditions de la liberté et un moyen de la mise en oeuvre des intentions des parties prenantes. Si les libertés sont trop importantes, donc chaque coalition dispose d'un moyen d'actions conséquent, l'organisation risquerait d'avoir des groupes d'acteurs puissants adverses ; ce qui pourrait agir pour qu'aucune alternative ne soit pas sans objection. Ce problème, décrit comme une opposition entre l'allocation du pouvoir et la stabilité de l'organisation, implique donc un arbitrage à faire entre *la préservation de la stabilité* et *libertés, et entre innovations et créativités*. Face à ce dilemme, nous proposons dans ce travail des études systémiques des organisations instables. Donc, nous ne cherchons pas à supprimer l'instabilité mais proposons de maîtriser les conflits. C'est-à-dire que le désaccord des préférences dû à l'existence d'un cycle d'effectivité : un cas de répartition de pouvoir permettant à une famille de coalitions de bloquer la totalité des alternatives dans un profil de préférences données. Il est naturel que le conflit résulte explicitement de l'interaction des préférences mais en tant que problème de structure, la question consiste à déterminer les conditions sous lesquelles le désaccord entre préférences est évitable, quelque soit le profil de préférences des joueurs.

En 1982, H. Moulin & B. Peleg(32) ont proposé des classes de fonctions d'effectivité stables tandis que J. Abdou (1) propose deux conditions sous lesquelles le désaccord de préférences peut se produire, donc l'organisation risque de se plonger dans un conflit. La même année, B. Peleg montre que sous la convexité (La force de l'union est supérieur à l'union des forces), le conflit ne se produira jamais si les joueurs et les coalitions sont rationnels dans l'usage de leurs pouvoirs et par rapport à leurs préférences. Ces conditions ne sont toutefois que des conditions nécessaires ou suffisantes seulement. C'était en 1985 que H. Keiding (24) proposa une condition nécessaire et suffisante pour l'absence de conflits dans une organisation : une structure de coalitions et d'ensembles d'alternatives qu'il appela *acyclicité* ou absence de cycle. Un cycle est une famille de coalitions qui exercent leurs pouvoirs par des blocages d'ensembles d'alternatives telle qu'il existe un profil de préférences dans lequel les parties prenantes de l'organisation sont en total désaccords : aucune alternative n'est rationnellement sélectionnée. L'existence d'un cycle est une condition à la fois nécessaire et suffisante pour l'instabilité. Donc, les caractéristiques des cycles : structures, ordre minimal et nombre permettent d'étudier le problème de conflit dans une organisation.

Ainsi, pour apprécier le niveau d'instabilité d'une organisation, J. Abdou (3) (2003) propose un *indice structurel d'instabilité* basé sur une propriété des cycles : l'ordre minimal (ou le nombre minimal de coalitions nécessaires pour briser la stabilité). Cet indice a été généralisé par J. Abdou (4) (2008) dans le cas des fonctions d'effectivité locales. une fonction d'effectivité locale est une représentation plus abstraites et plus générales de l'allocation du pouvoir dans une organisation. Ces deux travaux de J. Abdou ont mis en évidence le rapport entre l'ordre des cycles d'une fonction d'effectivité et le problème des conflits dans une organisation, donc les propriétés des cycles avec le problème du conflit. Cela nous incite à étudier les deux autres propriétés restantes : les formes structurelles et le nombre des cycles. La forme structurelle d'un cycle est directement corrélée à la complexité de l'élaboration d'un profil de préférences dans lequel les parties prenantes sont en total désaccord, tandis que le nombre des cycles détermine la probabilité de réalisation de ces désaccords.

Le présent travail est dédié aux études de la forme structurelle des cycles. Le calcul des fréquences des désaccords est l'objet des travaux communs de Bennor R. & Razafimahatolotra D. Nous allons structuré ce chapitre en deux parties. La première propose d'étudier les relations entres les différents cycles que nous étudions : Ceux introduit par J. Abdou (2) définitions 2.2 et 2.3, celui de H. Keiding (24) définition 2.1 et celui que nous introduisons dans la définition 2.4. La deuxième partie montre que pour les fonctions d'effectivité maximales et pour les fonctions d'effectivité anonyme et neutres, le cycle circulaire et le cycle sont équivalents.

2.2 Notations et définitions

L'ensemble des joueurs est représenté par un ensemble fini $N = \{1, \ldots, n\}$ et l'ensemble des alternatives par un ensemble fini $A = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Notons $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties d'un ensemble X et $\mathcal{P}_0(X) = \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$. Une fonction d'effectivité est une fonction $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ telle que $E(\emptyset) = \emptyset$, $B \in E(N)$, $\forall B \in \mathcal{P}_0(A)$ et $A \in E(S)$, $\forall S \in \mathcal{P}_0(N)$; E est dite monotone si $\forall B, C \in \mathcal{P}_0(A), \forall S, T \in \mathcal{P}_0(N)$ tels que $B \in E(S)$, alors $C \supset B$ et $T \supset S$ entraîne $C \in E(T)$. La fonction E est maximale si $\forall B \in \mathcal{P}_0(A)$, $\forall S \in \mathcal{P}_0(N)$, $B \notin E(S)$ entraîne $B^c \in E(S^c)$. La fonction E est anonyme si $\forall S, T \in \mathcal{P}_0(N)$ tel que $|S| = |T|$, alors $E(S) = E(T)$. La fonction E est neutre si $\forall S \in \mathcal{P}_0(N)$, $\forall B$, $C \in \mathcal{P}_0(A)$ tel que $|B| = |C|$, alors $B \in E(S)$ si et seulement si $C \in E(S)$. La fonction E est simple si $\forall S \in \mathcal{P}_0(N)$, $E(S) = \mathcal{P}_0(A)$ ou $E(S) = \{A\}$. Dans ce cas, on note $\mathcal{W}(E) = \{S \in \mathcal{P}_0(N) \mid E(S) = \mathcal{P}_0(A)\}$. Enfin, pour un ensemble X supposé un sous ensemble d'un ensemble Z, $X^+ = \{Y \subset Z \mid X \subset Y\}$.

Une *$E-$configuration d'ordre r* d'une fonction d'effectivité E est un $2r-$uplet $(S_1, \ldots, S_r, B_1, \ldots, B_r)$ tel que $B_k \in E(S_k)$, $\forall k = 1 \ldots r$. On note $\mathcal{L}(A)$ l'ensemble des relations d'ordre linéaire sur A. Un $R \in \mathcal{L}(A)$ est appelé préférence et un $S-$profil est un élément de $\mathcal{L}(A)^S$. Une fonction d'effectivité E est *instable* si et seulement si il existe $R^N \in \mathcal{L}(A)^N$ tel que $\forall x \in A\ \exists S(x) \subset N,\ B(x) \in E(S)$ tels que $y\ R^{S(x)}\ x, \forall y \in B(x)$.

Tout au long de ce travail, un ensemble est représenté par une lettre en majuscule et son cardinal par une lettre en minuscule. Une famille de coalitions est représentée par $(S_k)_k$, et une famille d'ensembles d'alternatives est représentée par $(B_k)_k$. Au cas où la famille de coalitions est formée d'ensembles deux à deux disjoints, on la notera $(T_k)_k$ et au cas où la famille d'ensembles d'alternatives est formée d'ensembles deux à deux disjoints, on la note $(C_k)_k$ au lieu de $(B_k)_k$. L'ensemble des indices est assimilé à un ensemble modulo sa valeur maximale. Par exemple, si nous considérons un ensemble d'indice $\{1, \ldots, r\}$, les éléments de cet ensemble sont modulo r. Donc, tout indice supérieur à r est égal au reste de sa division euclidienne par r. Sans qualification additionnelle, le mot cycle fait référence à la définition 2.1.

2.3 Structure des cycles et forme de désaccord

Dans cette partie, nous étudions les relations entre les cycles inférieurs, supérieurs, circulaires et les cycles, et identifions le type de profil dans lequel une fonction d'effectivité instable tombera dans une situation désaccord de préférences. Nous montrerons également au travers des observations la complexité de l'élaboration des discordes sur les préférences dans chacun de ces cycles.

Définition 2.1 (Keiding,1985) *Soit $E : \mathcal{P}(N) \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité. Une $E-$configuration $(S_1, \ldots, S_r, B_1, \ldots, B_r)$ est* un cycle d'ordre *r de base $(C_1, \ldots, C_r)$ si*

(C1) *$(C_1, \ldots, C_r)$ est une partition de A ;*

(C2) *Pour tout $J \subset \{1, \ldots, r\}$ tel que $\cap_{k \in J} S_k \neq \emptyset$, il existe $k_J \in J$ tel que*

$$B_{k_J} \subset \bigcup_{k \notin J} C_k \tag{2.1}$$

E est *acyclique* que s'il ne possède aucun cycle.

Remarque 1. *On peut remplacer (C2) par l'une des conditions suivantes :*

(C2a) Pour tout $J \subset \{1, \ldots, r\}$ tel que $\cap_{k \in J} S_k \neq \emptyset$, il existe $k_J \in J$ tel que $B_{k_J} \cap C_k = \emptyset, \forall k \in J$.

(C2b) Pour tout $J \subset \{1, \ldots, r\}$ tel que $\cap_{k \in J} S_k \neq \emptyset$, il existe $k_J \in J$ tel que $C_{k_J} \cap B_k = \emptyset, \forall k \in J$.

Comme $B_k \cap C_k = \emptyset$ $(k = 1 \ldots r)$, la condition (C2) signifie que S_k ait le pouvoir de bloquer tous les éléments de C_k. Ainsi, pour assurer l'instabilité d'une structure de pouvoir, la condition (C2a) dit que si les $S_k, k \in J$ ont un membre commun, alors il faut que l'une des coalitions, ici S_{k_J}, a le pouvoir de bloquer tous les éléments de $\cup_{k \in J} C_k$. La version duale de (C2b) dit qu'il existe un ensemble d'alternatives, ici C_{k_J} tel que tous les $S_k, k \in J$ ont le pouvoir de bloquer les éléments de C_{k_J}.

Cette interprétation qui semble intuitive n'implique pas que l'on puisse manipuler (informatique ou mathématique) les cycles avec aisance. La définition 2.1 elle-même montre qu'un cycle n'est pas un objet informatique ou mathématique simple. Par exemple, les travaux de Minutant (29) ou Takamiya (57), qui ont étudié la complexité (le mot complexité fait renvoi ici à la notion informatique de complexité. Dans le cas général, ce mot renvoi au sens de difficile.) des cycles montrent que l'on peut avoir un algorithme pour savoir si une fonction d'effectivité est acyclique ou non. Toutefois, aucun résultat informatique n'est disponible pour déterminer les cycles d'une fonction d'effectivité instable. Les travaux des mathématiciens comme Keiding (24) ou Kolpin (27) ou Abdou (5) ou d'autres montrent également la non évidence des propriétés des cycles. Ce problème nous montre l'intérêt d'un résultat d'équivalence qui propose une simplification de la forme structurelle des cycles. Pour une classe générale de fonctions d'effectivité, un cycle ne peut être équivalent qu'à une structure de complexité égale, donc nous proposons de chercher des classes de fonctions d'effectivité où les cycles sont simplifiés.

Notons que les cycles de ce travail sont suffisants pour obtenir un profil dans lequel le coeur d'une fonction d'effectivité est vide. Pour des cycles non suffisants pour l'instabilité, voir Danilov (17). La différence entre les cycles que nous étudions repose donc sur le niveau d'aisance d'une opération de déstabilisation d'une organisation.

2.3.1 Le cycle supérieur et le cycle inférieur

Définition 2.2 (Abdou, 1982) *Soit $E : \mathcal{P}(N) \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité. Une $E-$configuration $(T_1, \ldots, T_r, B_1, \ldots, B_r)$ est un* cycle supérieur *d'ordre r si $T_k \cap T_l = \emptyset, \forall k \neq l$ et $\cap_{k=1}^{r} B_k = \emptyset$.*

Définition 2.3 (Abdou, 1982) *Soit $E : \mathcal{P}(N) \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité. Une $E-$configuration $(S_1, \ldots, S_r, C_1, \ldots, C_r)$ est un* cycle inférieur *d'ordre r si $C_k \cap C_l = \emptyset, \forall k \neq l$, $C_1 \cup \cdots \cup C_r = A$ et $\cap_{k=1}^{r} S_k = \emptyset$.*

En 1982, J. Abdou (1) a montré que pour éviter l'instabilité, il faut que la répartition de pouvoir ne possède aucun cycle supérieur et cycle inférieur.

Observation 1. *Malgré la dualité de formulation de ces deux cycles, on constate qu'il est plus facile d'arriver à un cycle de préférences en présence d'un cycle supérieur qu'en présence d'un cycle inférieur.*

En effet, soit par exemple $N = \{1, \ldots, n\}$ l'ensemble des joueurs et des alternatives et soient $E, F : \mathcal{P}(N) \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(N))$ deux fonctions d'effectivité telles que $E(\{i\}) = \{N \setminus \{i\}, N\}$, $\forall i \in N$ et $F(N \setminus \{i\}) = \{S \mid S \ni i\}$, $\forall i \in N$. Les fonctions E et F sont des jeux d'élections dont candidats et électeurs sont identiques. Selon E, chaque membre a le pouvoir d'empêcher son élection, et selon F, un parti constitué de $(n-1)$ électeurs a le pouvoir de choisir le joueur restant. Alors, E a un unique cycle supérieur, ici $(\{1\}, \ldots, \{n\}, N \setminus \{1\}, \ldots, N \setminus \{n\})$ et F a un unique cycle inférieur, $(N \setminus \{1\}, \ldots, N \setminus \{n\}, \{1\}, \ldots, \{n\})$. Supposons que le but de l'élection est de choisir un jouer pour assumer une tâche désagréable. Dans E, aucun joueur n'est désigné pourvu que $\{i\}$ soit la pire proposition pour $\{i\}$, alors que dans F, il faut que chaque joueur négocie avec $(n-2)$ autres et que la préférence ait une forme particulière comme $j+1\ R^i\ j, \forall i, j \in N$. Donc, en particulier si deux joueurs i, j sont tels que l'un défend l'autre et réciproquement, ils risquent d'être désigné sans le vouloir.

Il est évident que la structure d'un cycle est largement plus complexe que la structure d'un cycle inférieur et celle structure d'un cycle supérieur. Pourtant, dans les deux propositions suivantes, nous montrons que sous certaines conditions, un cycle peut engendrer un cycle supérieur ou un cycle inférieur.

Notons

$$\mathcal{Q}_k = \{L \subset \{1, \dots, r\} \mid |L| = k\},$$

l'ensemble des indices à $k-$éléments.

Proposition 2.1 *Soient $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité et $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$ un cycle d'ordre r sur E. S'il existe $L \in \mathcal{Q}_{r-1}$ tel que $\forall k \neq l \in L,\ S_k \cap S_l = \emptyset$, alors E a un cycle supérieur d'ordre $\rho \leq r$.*

Preuve : Soit $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$ un cycle d'ordre r de base $(C_1, \dots, C_r)$. Sans nuire à la généralité, nous pouvons supposer que $L = \{1, \dots, r-1\}$ ($\in \mathcal{Q}_{r-1}$). Alors, $\forall k \neq l \in \{1, \dots, r-1\}$, $S_k \cap S_l = \emptyset$. Définissons,

$$K = \{\alpha \in \{1, \dots, r-1\} \mid S_r \cap S_\alpha \neq \emptyset\} \subset \{1, \dots, r\}$$

Nous pouvons démontrer que $K = \emptyset$, c'est-à-que les S_k sont deux à deux disjoints.

Si nous avons $\cap_{k \in L} B_k = \emptyset$ tandis que $\forall k \neq l \in L, S_k \cap S_l = \emptyset$, alors E admet un cycle supérieur d'ordre $r-1$. Admettons que $\cap_{k \in L} B_k \neq \emptyset$. Étant donné que $B_k \cap C_k = \emptyset$ ($k = 1 \dots r$), alors

$$B_1 \cap \dots \cap B_{r-1} \cap (C_1 \cup \dots \cup C_{r-1}) = \emptyset$$

Comme $(C_1, \dots, C_r)$ est une partition de A, alors $\cap_{k=1}^{r-1} B_k \subset C_r$. Par suite,

$$\forall k = 1 \dots r-1;\ B_k \cap C_r \neq \emptyset \tag{2.2}$$

Or, pour tout $\alpha \in K$ nous avons $S_r \cap S_\alpha \neq \emptyset$, alors de la définition 2.1 équation (C2a), il existe $k_\alpha \in \{\alpha, r\}$ tel que $B_{k_\alpha} \cap (C_\alpha \cup C_r) = \emptyset$. De l'équation 2.2, nous avons en particulier $B_\alpha \cap C_r \neq \emptyset$, donc $k_\alpha = r$. Par suite, $B_r \cap C_\alpha = \emptyset, \forall \alpha \in K$. C'est-à-dire que

$$B_r \subset \bigcup_{\alpha \notin (K \cup \{r\})} C_\alpha \tag{2.3}$$

Or, pour tout $\alpha \notin (K \cup \{r\})$ nous avons $S_r \cap S_\alpha = \emptyset$, et étant donné que pour tout $k \neq l \in \{1, \dots, r-1\}$, $S_k \cap S_l = \emptyset$, alors $\cap_{k \notin K} B_k = \emptyset$ implique que E admet un cycle supérieur d'ordre $r - |K| \leq r$. Admettons alors que $\cap_{k \notin K} B_k \neq \emptyset$, donc $B_r \cap \left(\cap_{k \notin (K \cup \{r\})}\right) B_k \neq \emptyset$. De l'équation 2.3

$$\left(\bigcup_{\alpha \notin (K \cup \{r\})} C_k\right) \cap \left(\bigcap_{\alpha \notin (K \cup \{r\})} B_\alpha\right) \neq \emptyset \tag{2.4}$$

Si $K \neq \emptyset$, l'équation 2.4 implique qu'il existe $\alpha \notin K$ ($\{1, \dots, r\} \setminus K \neq \emptyset$) tel que $C_\alpha \cap B_\alpha \neq \emptyset$. Ce qui est contraire à la définition 2.1. Donc, $K = \emptyset$. Par conséquent, $\forall \alpha \in \{1, \dots, r-1\}$, $S_\alpha \cap S_r = \emptyset$. Cela conduit à l'existence d'un cycle supérieur d'ordre r.

□

Proposition 2.2 *Soient $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité et $(S_1, \ldots, S_r, B_1, \ldots, B_r)$ un cycle d'ordre r sur E. S'il existe $L \in \mathcal{Q}_{r-1}$ tel que $\cap_{k \in L} S_k \neq \emptyset$, alors E a un cycle inférieur d'ordre $\rho \leq r$.*

Preuve : Soit $(S_1, \ldots, S_r, B_1, \ldots, B_r)$ un cycle d'ordre r de base $(C_1, \ldots, C_r)$ et admettons que $S_1 \cap \cdots \cap S_{r-1} \neq \emptyset$ ($L = \{1, \ldots, r-1\}$). De la définition 2.1, il existe $k_1, \ldots, k_{r-1} \in \{1, \ldots, r-1\}$, tous distincts, tels que

$$B_{k_1} \subset C_r, \; B_{k_2} \subset C_r \cup C_{k_1}, \; \ldots, \; B_{k_{r-1}} \subset A \setminus C_{k_{r-1}}$$

En changeant les numéros des indices, nous pouvons admettre sans nuire à la généralité que

$$B_1 \subset C_r, \; \ldots, \; B_k \subset C_r \cup \cdots \cup C_{k-1}, \; \ldots, \; B_r \subset C_1 \cup \cdots \cup C_{r-1} \tag{2.5}$$

Montrons que si E n'admet aucun cycle inférieur d'ordre $\rho < r$, alors

$$B_r \subset C_{r-1}, \ldots, B_2 \subset C_1$$

Premièrement : $B_r \subset C_{r-1}$.

Soit θ l'indice minimal, dans l'ordre $r < 1 < 2 \cdots < r-1$, tel que $B_r \cap C_\theta \neq \emptyset$. Si $\theta = r-1$, la preuve est terminée. Admettons donc que $\theta < r-1$. C'est-à-dire que

$$B_r \subset C_\theta \cup \cdots \cup C_{r-1} \tag{2.6}$$

De l'équation 2.5 avec l'indice θ donne $B_\theta \subset C_r \cup \cdots \cup C_{\theta-1}$, donc de l'équation 2.6

$$B_\theta \cap B_r = \emptyset$$

Si $S_r \cap S_\theta = \emptyset$, nous obtenons un cycle inférieur d'ordre 2, donc admettons que $S_r \cap S_\theta \neq \emptyset$. De la définition du cycle, il existe $k' \in \{\theta, r\}$ tel que $B_{k'} \cap (C_\theta \cup C_r) = \emptyset$. Comme $B_r \cap C_\theta \neq \emptyset$, alors $k' = \theta$. Ce qui donne :

$$B_\theta \cap C_r = \emptyset$$

C'est-à-dire que les ensembles B_1, B_θ, B_r sont deux à deux disjoints.

Si $S_1 \cap S_\theta \cap S_r = \emptyset$, nous obtenons un cycle inférieur d'ordre 3. Alors, admettons que $S_1 \cap S_\theta \cap S_r \neq \emptyset$, ce qui donnera :

$$B_\theta \cap (C_r \cup C_1) = \emptyset \tag{2.7}$$

Maintenant, soit $(\theta^t)_{t \geq 1}$, $\theta^{t+1} \in \{r, 1, \ldots, \theta - 1\}$ une suite strictement décroissante telle que θ^{t+1} soit l'indice minimal, dans l'ordre $r < 1 \cdots < r-1$, satisfaisant $B_{\theta^t} \cap C_{\theta^{t+1}} \neq \emptyset$. Donc :

$$B_{\theta^t} \subset C_{\theta^{t+1}} \cup \cdots \cup C_{\theta^t - 1} \tag{2.8}$$

Démontrons par récurrence sur t que $\theta^t \geq 2$.

De l'équation 2.7, l'assertion est vraie pour $t = 1$ i.e $\theta^2 \geq 2$. Supposons qu'elle l'est pour tout $s \leq t$, i.e. $\theta^{t+1} \geq 2$.

Comme $\theta^{t+1} < \theta^t < \cdots < \theta < r-1$. Alors, l'inclusion $B_{\theta^{t+1}} \subset C_r \cup \cdots \cup C_{\theta^{t+1}-1}$ de l'équation 2.5 avec l' hypothèse de récurrence $B_{\theta^s} \subset C_{\theta^{s+1}} \cup \cdots \cup C^s, \forall s \leq t$ entraînent que les ensembles

$$B_{\theta^{t+1}}, B_{\theta^t}, \ldots, B_\theta, B_r$$

sont deux à deux disjoints.

Si $S_r \cap S_\theta \cap \cdots \cap S_{\theta^{t+1}} = \emptyset$, nous obtenons un cycle inférieur d'ordre $t+2$, sinon la définition du cycle, $B_{\theta^t} \cap C_{\theta^{t+1}} \neq \emptyset, \ldots, B_r \cap C_\theta \neq \emptyset$ entraînent

$$B_{\theta^{t+1}} \cap C_r = \emptyset$$

Ce qui entraîne que les ensembles

$$B_{\theta^{t+1}}, B_{\theta^t}, \ldots, B_\theta, B_r, B_1$$

sont deux à deux disjoints.

Par conséquent, soit nous avons un cycle inférieur d'ordre $t+3$ soit la définition du cycle sur l'ensemble des indices $\{\theta^{t+1}, \ldots, \theta, r, 1\}$ donne :

$$B_{\theta^{t+1}} \cap C_1 = \emptyset$$

D'où

$$\forall t : \ B_{\theta^t} \subset C_2 \cup \cdots \cup C_{\theta^t - 1} \tag{2.9}$$

La suite $(\theta^t)_t$ étant strictement décroissante tandis que le nombre de ses termes est fini, donc il existe $\theta^{t_{\max}} = 2$. Au terme $t_{\max}$, l'équation 2.9 conduit à une contradiction. Ce qui montre que $\theta = r-1$.

Deuxièmement : $B_2 \subset C_1$.

Partant de $B_r \subset C_{r-1}$ et de $B_1 \subset C_r$, nous avons B_r, B_1, B_{r-1} sont deux à deux disjoints. Si $S_{r-1} \cap S_r \cap S_1 = \emptyset$, nous obtenons un cycle inférieur d'ordre 3 sinon, la définition du cycle donne :

$$B_{r-1} \subset C_2 \cup \ldots C_{r-2}$$

Ici, $r-1$ joue le rôle de r dans la première étape, c'est-à-dire que l'on peut montrer avec le même raisonnement que précédemment que

$$B_{r-1} \subset C_{r-2}$$

Par induction de $r-1$ à 2, on peut montrer progressivement , que $B_{r-p} \subset C_{r-p-1}$ $(p = 1 \ldots r-2)$. Au dernier terme, cette récurrence donne :

$$B_2 \subset C_1$$

Comme $B_1 \subset C_1$, alors $(S_1, \ldots, S_r,\ B_1, \ldots, B_r)$ est un cycle inférieur d'ordre r.

□

Les propositions 2.1 et 2.2 nous donnent le corollaire suivant

Corollaire 2.1 *Soit $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité. Alors, E a un cycle d'ordre $r \leq 3$ si et seulement si E a un cycle inférieur ou un cycle supérieur d'ordre $\rho \leq 3$.*

Preuve : Si $r = 2$, la proposition est triviale. Supposons que $r = 3$ et soit $(S_1, S_2, S_3, B_1, B_2, B_3)$ un cycle d'ordre 3. Si $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, la proposition 2.1 implique que E possède un cycle supérieur d'ordre $r \leq 3$. Si $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, la proposition 2.2 implique que E admet un cycle inférieur d'ordre $\rho \leq 3$.

□

Remarque 2. *Pour $r \geq 4$, il existe une fonction d'effectivité qui possède un cycle d'ordre r sans qu'elle possède pas de cycle inférieur ni cycle supérieur d'ordre $\rho \leq 4$.*

En effet, soit $N = \{1, \ldots, 5\}$, $A = \{x_1, \ldots, x_4\}$ et E la fonction d'effectivité telle que $E(S_1) = B_1^+, E(S_2) = B_2^+, E(S_3) = B_3^+, E(S_4) = B_4^+$, où $S_1 = \{1,2\}, S_2 = \{2,3\}, S_3 = \{4,5\}, S_4 = \{1,3,5\}$, $B_1 = \{x_2, x_4\}, B_2 = \{x_1, x_2\}, B_3 = \{x_1, x_4\}, B_4 = \{x_3\}$; et pour tout $S \supset S_k$, $E(S) = E(S_k)$. Dans les autres cas, $E(S) = \{A\}$. Il n'est pas difficile de vérifier que E ne possède ni cycle inférieur ni supérieur d'ordre $r \leq 4$ mais $(S_k, B_k)_{k=1,2,3,4}$ est un cycle d'ordre 4 de base $(\{x_1\}\, \{x_3\}, \{x_2\}, \{x_4\})$.

Les propositions 2.1 et 2.2 et l'exemple de la remarque 2 mettent en évidence l'importance de la différence structurelle entre les cycles supérieurs, les cycles inférieurs et les cycles. L'exemple suivant montre que même avec la sur-additivité (*Si $B \in E(S)$ et $C \in E(T)$, $S \cap T = \emptyset$ entraîne $B \cap C \in E(S \cup T)$*), une condition suffisante pour éviter les cycles supérieurs, les cycles et les cycles inférieurs restent nettement différents. Pour l'exemple suivant, nous devons prendre $r = 5$ car au cas où $r = 4$, la sur-additivité donne que les cycles d'ordre $r \leq 4$ sont des cycles inférieurs.

Exemple 2.1 *Soient $N = \{1, \ldots, 5\}$, $A = \{x_1, \ldots, x_5\}$ et E l'effectivité définie par : $\forall S \in \mathcal{P}(N), |S| \geq 3 \Rightarrow E(S) = \{B |\, |B| \geq 2\}$ et $\forall S \in \mathcal{P}(N),\ |S| < 3 \Rightarrow E(S) = \{A\}$.*

- *E est sur-additive*. S'il existe $B \neq A$ tel que $B \in E(S)$, alors $|S| \geq 3$. Par conséquent, si $B_k \in E(S_k), B_k \neq A$ $(k = 1, 2)$, $|S_1 \cap S_2| = |S_1| + |S_2| - |S_1 \cup S_2| \geq 1$. Alors, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Donc, $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ entraîne $B_k = A$ pour un $k \in \{1, 2\}$; c'est-à-dire que $B_1 \cap B_2 = B_{\bar{k}} \in E(S_{\bar{k}}), k \neq \bar{k} \in \{1, 2\}$. D'où $B_1 \cap B_2 \in E(S_1 \cup S_2)$, ce qui montre la sur-additivité.

- *E a un cycle d'ordre* 5. Soient $S_k = \{k, k+1, k+2\}$, $B_k = \{x_{k+3}, x_{k+4}\}$ ($k = 1 \ldots 5$ mod 5). Il n'est pas difficile de vérifier que $(S_1, \ldots, S_5, B_1, \ldots, B_5)$ est un cycle d'ordre 5 de base $\{\{x_1\}, \ldots, \{x_5\}\}$. La structure de ce cycle est montrée dans le tableau suivant :

S_k	$\{1,2,3\}$	$\{2,3,4\}$	$\{3,4,5\}$	$\{4,5,1\}$	$\{5,1,2\}$
B_k	$\{x_4, x_5\}$	$\{x_5, x_1\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_3, x_4\}$
C_k	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_4\}$	$\{x_5\}$

-*E ne possède ni cycle supérieur ni cycle inférieur*. La sur-additivité de E assure l'absence de cycle supérieur (Abdou(1)). De même, cela assure l'absence de cycle inférieur d'ordre 2. En outre, E ne possède aucun cycle inférieur d'ordre $r \geq 3$. En effet, soit r l'ordre minimal des cycles de E et supposons que $(S_1, \ldots, S_r, C_1, \ldots, C_r)$ soit un cycle inférieur d'ordre $r \geq 3$. Pour $r = 3$, $(|C_1|, \ldots, |C_3|) \in \{\pi(1,2,2), \pi(1,1,3)\}$ où π est une permutation de $\{1,2,3\}$; et pour $r = 4$, $(|C_1|, \ldots, |C_4|) \in \{\tau(1,1,1,2)\}$ où τ est une permutation de $\{1, \ldots, 4\}$. Donc, il faut $(2r-5)$ indices, disons $k_1, \ldots, k_{2r-5} \in \{1, \ldots, r\}$, pour lesquels nous avons $|C_{k_\alpha}| = 1$. Or, $\{x\} \in E(S)$ entraîne $S = N$, alors pour tout $\alpha = 1 \ldots 2r-5$, $S_{k_\alpha} = N$. Donc, $\cap_{k \neq k_\alpha} S_k = \emptyset$. Ce qui est en contradiction avec la minimalité de r.

□

Observons que l'exemple 2.1 nous permet de dégager un nouveau type de cycle, qui possède une structure intermédiaire entre le cycle supérieur, le cycle inférieur et le cycle. Nous étudions dans le suivant paragraphe ce nouveau cycle que nous appellerons cycle circulaire.

2.3.2 Le cycle circulaire

Plus généralement, le cycle de l'exemple 2.1. se construit comme suit :
1- On divise les joueurs en r groupes disjoints $(T_1, \ldots, T_r)$ et les alternatives en r ensembles d'alternatives disjoints $(C_1, \ldots, C_r)$;
2- Si une coalition comportant c groupes, $T_k \cup \cdots \cup T_{k+c-1}$ est effective pour bloquer l'union de c ensembles d'alternatives $C_k \cup \cdots \cup C_{k+c-1}$, alors toute coalition déduite de la première par remplacement de k par l reste effective pour bloquer les alternatives dans $C_l \cup \cdots \cup C_{l+c-1}$.

Formellement,

Définition 2.4 *Soit $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité. Une $E-$configuration $(S_1, \ldots, S_r, B_1, \ldots B_r)$ est* un cycle circulaire d'ordre r *de taille c, $1 \leq c \leq r-1$, s'il existe $(T_1, \ldots T_r)$ une partition de N et $(C_1, \ldots, C_r)$ une partition de A tels que*

$$\forall k = 1 \ldots r, \;\; B_k = C_k \cup \cdots \cup C_{k+c-1}, \;\; S_k = T_{k+c} \cup \cdots \cup T_{k-1}$$

Remarque 3. *Un cycle circulaire d'ordre r de taille $c = 1$ est un cycle inférieur alors qu'un cycle circulaire d'ordre r de taille $c = r-1$ est un cycle supérieur.*

Ci-après, nous montrerons d'une part que les cycles circulaires sont une généralisation des cycles inférieurs et des cycles supérieurs et d'autre part que les cycles circulaires sont des cycles.

Proposition 2.3 *Soit $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité monotone. Alors*
(a) Si E admet un cycle supérieur d'ordre r, alors elle admet un cycle circulaire d'ordre r de taille $c = r-1$.
(b) Si E admet un cycle inférieur d'ordre r, alors elle admet un cycle circulaire d'ordre r de taille $c = 1$.

Preuve : *Montrons d'abord qu'un cycle supérieur engendre un cycle circulaire.*

Soit r l'ordre minimal des cycles supérieurs de E et soit $(T_1, \ldots, T_r, B_1, \ldots, B_r)$ un cycle supérieur d'ordre r.

Si $r = 2$, un cycle circulaire est à la fois un cycle inférieur, un cycle supérieur et un cycle. Pour $r \geq 3$, posons $J_k = \{1, \ldots, r\} \setminus \{k\}$. Alors, $J_k \cap J_p \neq \emptyset, \forall k \neq p \in \{1, \ldots, r\}$. De la définition 2.2, nous avons :

$$\forall k = 1 \ldots r : \bigcap_{l \in J_k} B_l \neq \emptyset \tag{2.10}$$

Posons

$$D_k = \bigcap_{l \in J_k} B_l, \quad V_k = B_k \setminus \bigcup_{l \in J_k} B_l \text{ et } C_k = D_k \cup V_k$$

Alors, pour tout $k \neq p \in \{1, \ldots, r\}$,

$$V_k \cap V_p = \left(B_k \setminus \bigcup_{l \in J_k} B_l \right) \cap \left(B_p \setminus \bigcup_{l \in J_p} B_l \right) \subset B_l \cap B_l^c = \emptyset, \; l \in J_k \cap J_p;$$

$$D_k \cap D_p = \left(\bigcap_{l \in J_k} C_l \right) \cap \left(\bigcap_{l \in J_p} C_l \right) = \bigcap_{l \in J_k \cup J_p} C_l = \bigcap_{l=1}^{r} C_l = \emptyset \, ;$$

$$D_k \cap V_p = \left(\bigcap_{l \in J_k} B_l \right) \cap \left(B_p \setminus \bigcup_{l \in J_p} B_l \right) \subset B_p \cap B_p^c = \emptyset.$$

Par conséquent, pour tout $k \neq p \in \{1, \ldots, r\}$,

$$C_k \cap C_p = (D_k \cup V_k) \cap \left(D_p \cup V_p\right) = \emptyset$$

De la monotonie de E, nous pouvons admettre que $C_1 \cup \cdots \cup C_r = B_1 \cup \cdots \cup B_r = A$ et $T_1 \cup \cdots \cup T_r = N$, c'est-à-dire que $(C_1, \ldots, C_r)$ est une partition de A et $(T_1, \ldots, T_r)$ est une partition de N. Comme $J_k = \{k+1, \ldots, k-1\}$, alors

$$\forall k = 1 \ldots r : C_{k+1} \cup \cdots \cup C_{k-1} = B_k \in E(T_k)$$

Ce qui montre que E a un cycle circulaire d'ordre r de taille $c = r - 1$.

Par un raisonnement analogue, un cycle inférieur d'une fonction d'effectivité monotone est un cycle circulaire d'ordre r de taille $c = 1$.

$\square$

Observation 2. *Cette proposition montre que la structure circulaire est plus complexe que celle d'un cycle supérieur ou inférieur. Il est plus difficile de provoquer le désordre dans une société qui possède un cycle circulaire sans cycles inférieur et supérieur qu'une société possédant un cycle inférieur.*

En effet, soient $N = \{1, \ldots, n\}$ l'ensemble des joueurs, $A = \{x_1, \ldots, x_m\}$ l'ensemble des alternatives, $(T_1, \ldots, T_r)$ une partition de N et $(C_1, \ldots, C_r)$ une partition de A. Si $E, F : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ sont les deux fonctions d'effectivité telles que pour tout $k = 1 \ldots r$, $C_k \in E(T_{k+1} \cup \cdots \cup T_{k-1})$ et $C_k \cup \cdots \cup C_{k+c-1} \in F(T_{k+c} \cup \cdots \cup T_{k-1})$ où $(1 < c < r-1)$, alors E admet un cycle inférieur alors que F admet un cycle circulaire de taille c. Les fonctions E et F n'ont pas de différence structurelle importante mais en cas de vacuité du coeur, le désaccord entre les préférences des joueurs dans F est plus subtile que celui dans E. Il est du type $x_k \ R^i x_{k+1} \ \ldots R^i x_{k-1}$, $k = 1 \ldots r$.

Proposition 2.4 *Soit $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité. Pour tout $r \geq 2$ et $c = 1 \ldots r-1$, une $E-$configuration circulaire d'ordre r de taille c sur E est un cycle d'ordre r sur E.*

Preuve : Soit $(S_1, \ldots, S_r, B_1, \ldots B_r)$, une $E-$configuration circulaire d'ordre r de taille c sur E. Alors, il existe $(T_1, \ldots T_r)$ une partition de N et $(C_1, \ldots, C_r)$ une partition de A telles que :

$$S_k = T_{k+c} \cup \cdots \cup T_{k-1} \text{ et } B_k = C_k \cup \cdots \cup C_{k+c-1}$$

Posons $J_k = \{k+c, \ldots, k-1\}$ et soit $J \subset \{1, \ldots, r\}$ tel que $\cap_{k \in J} S_k \neq \emptyset$. Comme $\cap_{k \in J} S_k = \cap_{k \in J} \left(\cup_{l \in J_k} T_l\right)$ et $(T_1, \ldots, T_r)$ est une partition de N, alors

$$\bigcap_{k \in J} S_k \neq \emptyset \Leftrightarrow \bigcap_{k \in J} J_k \neq \emptyset$$

Prenons $k_J \in \cap_{k \in J} J_k$, c'est-à-dire que $k_J \notin \cup_{k \in J} J_k^c$. Puis que $C_1, \ldots, C_r$ est une partition de A, alors

$$C_{k_J} \cap \left(\bigcup_{p \notin J_k^c} C_p \right) = \emptyset$$

Ce qui montre que $(S_1, \ldots, S_r, B_1, \ldots B_r)$ est cycle d'ordre r de base $(C_1, \ldots, C_r)$ (Définition 2.1 (C2b)).

□

A la suite du lemme 2.1, une $E-$ configuration circulaire d'ordre $r \leq 3$ engendre un cycle supérieur ou un cycle inférieur d'ordre 3. Malgré que la circularité généralise les cycles inférieurs et les cycles supérieurs, nous pouvons montrer que même avec la sur-additivité, il existe une fonction d'effectivité non-circulaire mais possédant un cycle d'ordre 5.

Exemple 2.2 *Fonction sur-additive et non circulaire mais possède un cycle d 'ordre 5. Soient $N = \{1, \ldots, 7\}$ et $A = \{x_1, \ldots, x_5\}$ et considérons l'effectivité E telle que*

$$\begin{cases} E(S_1) = \{x_2, x_3, x_4\}^+, E(S_2) = \{x_3\}^+, E(S_3) = \{x_4, x_5\}^+, \\ E(S_4) = \{x_5, x_2\}^+ \textit{ et } E(S_5) = \{x_1\}^+ \textit{ où } S_1 = \{1,2,3,4\}, \\ S_2 = \{1,3,4,5,7\}, S_3 = \{1,2,5,6\}, S_4 = \{3,6,7\} \textit{ et } S_5 = \{4,5,6,7\}. \\ \textit{Si } S \in \{S | S \supset S_k, k = 1 \ldots r\}, \textit{ alors } E(S) = E(S_k), \textit{ sinon } E(S) = \{A\}. \end{cases}$$

Posons $H^i = \{k \mid S_k \ni i\}$, alors $H^1 = \{1,2,3\}, H^2 = \{1,3\}$, $H^3 = \{1,2,3\}$, $H^4 = \{1,2,5\}$, $H^5 = \{2,3,5\}$ $H^6 = \{3,4,5\}$ et $H^7 = \{2,4,5\}$, et pour tout J tel que $\cap_{k \in J} S_k \neq \emptyset$, alors $J \subset H^i$ pour un $i \in N$.

E est sur-additive. Si $S_k \in \mathcal{P}_0(N)$ $(k = 1,2)$ sont tels que $B_k \in E(S_k)$ et $B_k \neq A$, alors $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$. Donc, E est sur-additive, ce qui implique que E ne possède aucun cycle supérieur.

E n'a aucun cycle d'ordre $r \leq 4$. Comme $H \in \{H^i \mid \nexists j \text{ tel que} H^j \subsetneq H^i\}$, entraîne $|H| \geq 3$, alors E ne possède aucun cycle d'ordre 3. Si E admet un cycle d'ordre 4 de base $(C_1, \ldots, C_4)$ alors

$$\forall i \in N, \exists\, k(H^i) : B_{k(H^i)} \cap \bigcup_{k \in H^i} C_k = \emptyset$$

En prenant les $H \in \{H^i \mid \nexists j \text{ tel que} H^j \subsetneq H^i\}$, alors on doit avoir trois indices k_1, k_2, k_3 tels que B_{k_1}, B_{k_2} et B_{k_3} soient des singletons, ce qui n'est pas possible selon la définition de E.

E possède un cycle d'ordre 5. Considérons l'$E-$configuration $(S_1, \ldots, S_5, B_1, \ldots, B_5)$ et la partition $(C_1, \ldots, C_5)$ comme dans le tableau suivant :

S_k	$\{1,2,3,4\}$	$\{1,3,4,5,7\}$	$\{1,2,5,6\}$	$\{3,6,7\}$	$\{4,5,6,7\}$
B_k	$\{x_2, x_3, x_4\}$	$\{x_3\}$	$\{x_4, x_5\}$	x_5, x_2	$\{x_1\}$
C_k	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_4\}$	$\{x_5\}$

On peut vérifier que $(S_1, \ldots, S_5, B_1, \ldots, B_5)$ est un cycle de base $(C_1, \ldots, C_5)$, en particulier nous avons les égalités suivantes :

$$\{x_1\} \cap \left(\bigcup_{k \in H^s} B_k \right) = \{x_2\} \cap \left(\bigcup_{k \in H^5} B_k \right) = \{x_3\} \cap \left(\bigcup_{k \in H^6} B_k \right) = \{x_4\} \cap \left(\bigcup_{k \in H^7} B_k \right),$$

avec $s = 1 \ldots 4$.

E ne possède aucun cycle circulaire d'ordre 5. Supposons le contraire et soit $(S_1(c), \ldots, S_5(c), B_1(c), \ldots, B_5(c))$ $(1 \leq c \leq 4)$, un cycle circulaire d'ordre 5. Alors, il existe $(T_1, \ldots, T_5)$ une partition de N et $(C_1, \ldots, C_r)$ une partition de A tels que :

$$B_k(c) = C_k \cup \cdots \cup C_{k+c-1} \text{ et } S_k(c) = T_{k+c} \cup \cdots \cup T_{k-1}$$

De la définition de E, il existe au plus un $k_0 \in \{1, \ldots, 5\}$ tel que $|S_{k_0}(c)| = 3$, et pour tout le reste $|S_k(c)| \geq 4$.

Premier cas : La partition $(T_1, \ldots, T_5)$ est de la forme $(\{i_1\}, \ldots, \{i_4\}, \{i_5, i_6, i_7\})$. Comme pour au moins 4 indices, nous avons $|S_k(c)| \geq 4$, alors $c = 4$. Par conséquent, pour tout k : $|B_k(c)| = 1$. Ce qui entraîne que pour tout k, $S_k(c) \supset \{1,3,4,5,7\}$ ou $S_k(c) \supset \{4,5,6,7\}$. Donc, $\cap_{k=1\ldots5} S_k \neq \emptyset$. Ce qui est impossible.

Deuxième cas : La partition $(T_1, \ldots, T_5)$ est de la forme $(\{i_1\}, \{i_2\}, \{i_3\}, \{i_4, i_5\}, \{i_6, i_7\})$. Comme $\#\{k \mid |S_k(c)| \geq 4\} \geq 4$, alors $c \geq 3$. Si $c = 3$, nous avons $|B_k(c)| = 2, \forall k = 1 \ldots 5$. Ce qui n'est possible que si $S_k(c) \in \{S \mid S \supset S_k, k = 2 \ldots 5\}$. C'est-à-dire que l'on peut réduire l'ordre des cycles de E. Ce qui est contraire à l'absence de cycle d'ordre $r \leq 4$. Si $c = 4$, alors $|B_k(c)| = 1$. Ce qui ne pourrait pas être le cas.

□

Observation 3. *Ici, pour aboutir à l'instabilité, il faut que chaque* S_k *mette les alternatives de* C_k *au fond. Alors, les joueurs qui se trouvent dans* $\cap_{k \in J} S_k, J \subset$

$\{1, \ldots 5\}$ *doivent structurer leurs préférences pour que les objections soient cohérentes, c'est-à-dire que chaque joueur soigne sa préférence en fonction de celle des autres, ici de façon non mécanique, pas comme dans le cas de la circularité.*

Par la suite, nous simplifions la structure des cycles des fonctions d'effectivité monotones maximales et des fonctions d'effectivité monotones anonymes et neutres.

2.4 Simplification de la structure des cycles

La simplification de la forme des cycles, qui consiste à montrer l'equivalence d'un cycle plus complexe à un cycle dont l'écriture est mathématiquement plus simple, a commencé implicitement par les travaux de Nakamura (1979)(34) (ou dans l'ouvrage de J. Abdou et H. Keiding (5)) qui montre qu'une fonction d'effectivité simple est instable si et seulement si elle possède une $E-$configuration répondant aux critères des cycles inférieurs. C'est-à-dire qu'en cas de conflit, un cycle inférieur en est l'origine et inversement, en présence d'un cycle inférieur, il y toujours un moyen de provoquer le désordre. Formellement,

Théorème 2.1 *Soit* $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ *une fonction d'effectivité monotone et simple. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) *E possède un cycle circulaire ;*
(ii) *E possède un cycle inférieur ;*
(iii) *E possède un cycle ;*
(iv) *E est instable.*

Les travaux de Moulin (1981) (33) (31), de J. Abdou (5) ou les travaux récents de J. Abdou (4) nous permettent d'identifier d'autres types d'organisation de pouvoir où les cycles sont des cycles circulaires. En effet,

Théorème 2.2 *Soit* $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ *une fonction d'effectivité monotone et maximale. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) *E possède un cycle circulaire ;*
(ii) *E possède un cycle inférieur ou un cycle supérieur ;*
(iii) *E possède un cycle ;*
(iv) *E est instable.*

Preuve : (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Proposition 2.3 et la remarque qui s'en suit.
(ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Les travaux récents de Abdou (3) et (4) montrent que l'ordre minimal des cycles d'une fonction effectivité maximale est 2 ou 3. Donc, cette équivalence découle du corollaire 2.1. On peut voir aussi Abdou (5) ou Danilov (17).
(iii) $\Leftrightarrow$ (iv). Keiding (24).

□

Dans la suite, nous considérons les fonctions d'effectivité monotones, anonymes et neutres.

Lemme 2.1 *Soit $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité monotone, anonyme et neutre. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *E possède un cycle circulaire ;*

(ii) *il existe $S \in \mathcal{P}_0(N)$ et $B \in E(S)$ tels que si $s =\mid S \mid$ et $b =\mid B \mid$ nous avons :*

$$b + \left\lceil s\frac{m}{n} \right\rceil \leq m$$

Preuve : (i)⇒(ii). Si E est circulaire, alors il existe $(T_1, \ldots, T_r)$ une partition de N et $(C_1, \ldots, C_r)$ une partition de A et $c, 1 \leq c \leq r-1$ tels que

$$\forall k = 1 \ldots r; \quad C_k \cup \cdots \cup C_{k+c-1} \in E(T_{k+c} \cup \cdots \cup T_{k-1})$$

Si pour tout $\forall k = 1 \ldots n$, $m(t_k + \cdots + t_{k+c-1}) > n(c_k + \cdots + c_{k+c-1})$, alors

$$\sum_{k=1}^{r} m\,(t_k + \cdots + t_{k+c-1}) > \sum_{k=1}^{r} n\,(c_k + \cdots + c_{k+c-1})$$
$$mc\sum_{k=1}^{r} (t_1 + \cdots + t_r) > nc\sum_{k=1}^{r} (c_1 + \cdots + c_r)$$
$$mcn > ncm$$

Donc, il existe $k_1,\ 1 \leq k_1 \leq r$ tel que

$$m(t_{k_1} + \cdots + t_{c+k_1-1}) \leq n(c_{k_1} + \cdots + c_{c+k_1-1}) \tag{2.11}$$

Posons $S = T_{k_1+c} \cup \cdots \cup T_{k_1-1}$ et $B = C_{k_1} \cup \cdots \cup C_{k_1+c-1}$. Alors,

$$\begin{aligned} b + \left\lceil s\frac{m}{n} \right\rceil &= c_k + \cdots + c_{k+c-1} + \left\lceil (n - (t_k + \cdots + t_{k+c-1}))\frac{m}{n} \right\rceil, \\ &= m + c_k + \cdots + c_{k+c-1} - \left\lceil (t_k + \cdots + t_{k+c-1})\frac{m}{n} \right\rceil, \\ &\leq m. \text{ (D'après l'équation 2.11)} \end{aligned}$$

(ii)⇒(i). Supposons qu'il existe $S \in \mathcal{P}_0(N)$ et $B \in E(S)$ tels que

$$b + \left\lceil s\frac{m}{n} \right\rceil \leq m \tag{2.12}$$

Nous allons prouver qu'il existe $(T_1, \ldots, T_r)$ une partition de N, $(C_1, \ldots, C_r)$ une partition de A et $1 \leq c \leq r-1$ tel que

$$\forall k = 1 \ldots r; \quad C_{k+c} \cup \cdots \cup C_{k-1} \in E(T_k \cup \cdots \cup T_{k+c-1}).$$

Premier cas : $m < n$

De l'équation 2.12,

$$b + \frac{ms}{n} \leq b + \left\lceil s\frac{m}{n} \right\rceil \leq m,$$

donc $nb + ms \leq nm$. Par conséquent :

$$ms \leq (m-b)n \tag{2.13}$$

Soit θ le quotient entier de n par m et φ son reste. Donc,

$$n = \theta m + \varphi, \quad 0 \leq \varphi < n,\ 1 \leq \theta,$$

et soit $t_1, \ldots, t_m$ la suite d'entiers positifs telle que :

$$t_1 = \theta + \left\lceil \frac{\varphi}{m-b} \right\rceil \text{ et } \forall k = 2 \ldots m; \quad t_k = \theta + \left\lceil k\frac{\varphi}{m-b} \right\rceil - \left\lceil (k-1)\frac{\varphi}{m-b} \right\rceil .$$

En écrivant $m\varphi = m\varphi - b\varphi + b\varphi = (m-b)\varphi + b\varphi$, nous avons :

$$\begin{aligned} t_1 + \cdots + t_m &= m\theta + \left\lceil m\frac{\varphi}{m-b} \right\rceil, \\ &= m\theta + \varphi - \left\lceil b\frac{\varphi}{m-b} \right\rceil, \\ &\leq m\theta + \varphi = n. \end{aligned}$$

Soit $k \in \{1, \ldots, m\}$

a) Si $k + (m-b) \leq m$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} t_k + \ldots t_{k+(m-b)-1} &= (m-b)\theta + \left\lceil (k+m-b-1)\frac{\varphi}{m-b} \right\rceil - \left\lceil (k-1)\frac{\varphi}{m-b} \right\rceil, \\ &= (m-b)\theta + \varphi + \left\lceil (k-1)\frac{\varphi}{m-b} \right\rceil - \left\lceil (k-1)\frac{\varphi}{m-b} \right\rceil, \\ &= (m-b)\theta + \varphi + \left(\frac{\varphi}{m} - \frac{\varphi}{m}\right), \\ &\geq (m-b)\theta + (m-b)\frac{\varphi}{m}, \\ &\geq (m-b)\left(\theta + \frac{\varphi}{m}\right), \\ &\geq (m-b)\frac{n}{m}, \\ &\geq s. \end{aligned}$$

La dernière ligne vient de l'équation 2.13.

b) Si $k + (m-b) > m$ (i.e. $k > b$) et sachant que que $\lceil x+y \rceil \leq \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$, alors

$$\begin{aligned} t_k + \ldots t_{k+(m-b)-1} &= [t_k + \cdots + t_m] + [t_1 + \cdots + t_{k+(m-b)-m-1}], \\ &= (m-b)\theta + \left\lceil m\frac{\varphi}{m-b} \right\rceil - \left\lceil (k-1)\frac{\varphi}{m-b} \right\rceil + \left\lceil (k-b-1)\frac{\varphi}{m-b} \right\rceil, \\ &\geq (m-b)\theta + \left\lceil (m-b+k-1)\frac{\varphi}{m-b} \right\rceil - \left\lceil (k-1)\frac{\varphi}{m-b} \right\rceil, \\ &\geq s. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall k = 1 \ldots n; \quad t_k + \ldots t_{k+(m-b)-1} \geq s \tag{2.14}$$

Maintenant, considérons $(T_1, \ldots, T_m)$ une partition de N telle que $\forall k = 1 \ldots m; \ |T_k| = t_k$ et $c = (m-b)$. Alors, de l'équation 2.14, nous avons :

$$\forall k = 1 \ldots m; \quad |T_k \cup \cdots \cup T_{k+c-1}| \geq s.$$

Comme $|\{x_{k+c}\} \cup \cdots \cup \{x_{k-1}\}| = m - c = b$, alors du point de vue de l'équation 2.12, de la monotonie, de l'anonymat et de la neutralité de E, nous avons :

$$\forall k = 1 \ldots r; \quad \{x_{k+c}\} \cup \cdots \cup \{x_{k-1}\} \in E(T_k \cup \cdots \cup T_{k+c-1})$$

Ce qui prouve la circularité d'ordre n et de taille $m-(m-b)=b$ de E.

Deuxième cas : $n<m$.
De l'anonymat et la neutralité de E, on peut faire la preuve de la même manière que $n>m$.

En conclusion, E admet un cycle circulaire d'ordre $r=\min\{n,m\}$ de taille b ou $m-b$.

□

Ainsi, nous avons :

Théorème 2.3 *Soit $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité monotone, anonyme et neutre. Alors, E est circulaire si et seulement si elle est instable.*

Preuve : Rappelons qu'une fonction d'effectivité monotone, anonyme et neutre est stable si et seulement si $\forall S \in \mathcal{P}_0(N),\ \forall B \in \mathcal{P}_0(A),\ \ B \in E(S) \Leftrightarrow b + \lceil s\frac{m}{n} \rceil > m$ (Moulin (1981) (31) ou (33)). Donc, le lemme 2.1 conduit au résultat voulu.

□

Corollaire 2.2 *Soit $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité monotone, anonyme et neutre. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) *E possède un cycle circulaire ;*
(ii) *E possède un cycle ;*
(iii) *E est instable.*

Il est évident que pour une fonction d'effectivité monotone, anonyme et neutre, les cycles inférieurs ou supérieurs ne sont pas équivalents aux cycles circulaires (Exemple 5).

2.5 Conclusion

La classe des fonctions d'effectivité maximales et celle des anonymes et neutres ne représentent qu'une petite partie des différentes formes d'organisation. Nous laissons donc ouvert le problème de simplification des cycles des autres classes telles que les fonctions d'effectivité anonymes ou neutres seulement. Tout au long de cette recherche, la classe des fonctions d'effectivité décomposables nous a intéressé particulièrement car ces fonctions sont les seules qui satisfassent le principe de révélation du pouvoir (35), et sont définies à partir des jeux à utilités transférables. Nous supposons sans parvenir à un résultat démontré que le cycle aurait une forme similaire au balancement de Scarf (27), (30).

Équilibre et stabilité d'une fonction d'effectivité

3

Une fonction d'effectivité n'est pas équilibrée s'il existe une partition généralisée de coalitions qui pourraient faire opposition contre toutes les issues sociales. En 1989, Kolpin montrait qu'une fonction d'effectivité instable n'est pas équilibrée mais que la réciproque est fausse. Nous introduisons la notion d'équilibre fort, une notion déduite de l'équilibre, et montrons que la stabilité, l'équilibre et l'équilibre fort sont équivalents pour les fonctions d'effectivité monotones et simples et pour les fonctions d'effectivité monotones et maximales.

Mots clés : Fonction d'effectivité, partition généralisée, équilibre, acyclicité, stabilité.

JEL Classification : D70, D71.

AMS Classification : 91A44

3.1 Introduction

Une famille d'ensembles est une partition généralisée si la répartition des éléments dans cette famille est équilibrée. En fait partie, les partitions où chaque joueur appartient à un seul ensemble. Pour les jeux à utilités transférables où les coalitions agissent selon leurs valeurs, la connaissance des interventions des familles de coalitions formant une partition généralisée est nécessaire et suffisante pour caractériser la stabilité du jeu : existence d'une solution non opposable (Bondareva, (1963)(16) ; Shapley, (1967)(52)). Cette propriété a été généralisée pour les jeux à utilités non transférables mais elle a perdu la nécessité tout en gardant la suffisance pour la stabilité. Comme les fonctions d'effectivité généralisent, en un certain sens les jeux à utilités transférables et non transférables, il semble naturel qu'il y ait une structure de pouvoir formant une partition généralisée.

Kolpin (1991)(27) a défini l'équilibre de pouvoir d'une fonction d'effectivité tel que si l'on considère une partition généralisée de coalitions, il existe toujours une alternative non opposable par au moins un joueur, quoique ce joueur fasse en faisant partie d'une coalition de la partition généralisée. Si les ensembles de blocage utilisés par les coalitions dans une partition généralisée de coalitions sont connus, cette définition offre une procédure presque algorithmique permettant d'identifier des alternatives non opposables, si celles-ci existent. Toutefois, les propriétés de cette procédure ne permettent pas de déduire si la fonction d'effectivité est stable ou non. Nous avons deux interprétations possibles à cette négativité, lesquelles renvoient aux anomalies suivantes :

Premièrement, en tant que condition suffisante de stabilité, l'interprétation de la distribution équilibrée du pouvoir a tendance à donner moins de pouvoir aux coalitions, et ce, afin d'éviter l'instabilité.

Deuxièmement, en tant que mode de sélection des alternatives stables, la définition considère trop de coalitions ou impose trop de conditions pour que la non vacuité de l'ensemble des alternatives non opposables devienne difficile à atteindre, avec pour effet qu'elle perde sa nécessité pour la stabilité.

Selon nous, ce défaut viendrait du choix de la famille de coalitions car la question d'opposabilité ou non d'une alternative dépend notamment de la possibilité ou non de l'élaboration d'un profil de préférences, et pas seulement de la répartition des joueurs au travers des coalitions. Nous proposons donc dans ce travail de réécrire la définition de Kolpin (27) en remplaçant la partition généralisée par une structure plus adaptée aux fonctions d'effectivité. De ce fait, nous faisons référence à la définition de cycle, introduit par Hans Keiding (24), dont l'absence est la seule condition nécessaire et suffisante pour la stabilité. Ce travail a pour objectif de trouver des classes de fonctions d'effectivité où la partition généralisée comme le cycle est une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité.

3.2 Préliminaires

Après avoir précisé les notations et définitions de base, nous présentons ici des exemples qui introduisent progressivement la définition d'équilibre de pouvoir en fonction d'effectivité et mettent en évidence les propriétés et les intérêts de la notion d'équilibre de pouvoir en matière d'analyse du pouvoir dans une organisation.

L'ensemble des joueurs est représenté par un ensemble fini $N = \{1, \ldots, n\}$ et l'ensemble des alternatives par un ensemble fini $A = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Une coalition est un sous-ensemble S de N. Si $Y \subset X$, alors $Y^c = X \setminus Y$. Notons $\mathcal{P}(X)$, l'ensemble des parties d'un ensemble X et $\mathcal{P}_0(X) = \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$. Une fonction d'effectivité est une fonction $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ telle que $E(\emptyset) = \emptyset$, $B \in E(N)$, $\forall B \in \mathcal{P}_0(A)$ et $A \in E(S)$, $\forall S \in \mathcal{P}_0(N)$; E est dite monotone si $\forall B, C \in \mathcal{P}_0(A), \forall S, T \in \mathcal{P}_0(N)$ tels que $B \in E(S)$, alors $C \supset B$ et $T \supset S$ entraîne $C \in E(T)$. La fonction E est maximale si $\forall B \in \mathcal{P}_0(A)$, $\forall S \in \mathcal{P}_0(N)$, $B \notin E(S)$ entraîne $B^c \in E(S^c)$. La fonction E est anonyme si $\forall S, T \in \mathcal{P}_0(N)$ tel que $|S| = |T|$, alors $E(S) = E(T)$. La fonction E est neutre si $\forall S \in \mathcal{P}_0(N)$, $\forall B$, $C \in \mathcal{P}_0(A)$ tel que $|B| = |C|$, alors $B \in E(S)$ si et seulement si $C \in E(S)$. La fonction E est simple si $\forall S \in \mathcal{P}_0(N)$, $E(S) = \mathcal{P}_0(A)$ ou $E(S) = \{A\}$. Dans ce cas, on note $\mathcal{W}(E) = \{S \in \mathcal{P}_0(N) \mid E(S) = \mathcal{P}_0(A)\}$.

Une $E-$*configuration* d'ordre r d'une fonction d'effectivité E est un $2r-$uplet $(S_1, \ldots, S_r, B_1, \ldots, B_r)$ tel que $B_k \in E(S_k)$, $\forall k = 1 \ldots r$. On note $\mathcal{L}(A)$ l'ensemble des relations d'ordre linéaire sur A. Un $R \in \mathcal{L}(A)$ est appelé préférence et un $S-$profil est un élément de $\mathcal{L}(A)^S$. Une fonction d'effectivité E est *stable* si et seulement si, pour tout $R^N \in \mathcal{L}(A)^N$, il existe $x \in A$ tel que pour tout $S \subset N$, pour tout $B \in E(S)$ on ne peut pas avoir $y \; R^S \; x, \forall y \in B$.

Exemple 3.1 *Soit E un jeu à deux joueurs $\{1,2\}$ et à deux alternatives $\{x_1, x_2\}$ tel que $E(\{i\}) = \{\{x_i\}, \{x_1, x_2\}\}$.*

Si l'on connaît la distribution du pouvoir, on peut prévoir l'ensemble des alternatives éliminées, soit par la connaissance des préférences des joueurs, soit par la connaissance des intentions de blocage via la formation des coalitions. Dans le second cas, on peut savoir partiellement les préférences, en sachant que vouloir bloquer une alternative via un ensemble d'alternatives signifie que ces alternatives sont préférées à l'alternative rejetée. Cela nous permet d'avancer les analyses suivantes :

Le joueur i a le pouvoir de bloquer l'issue sociale x_j, $j \neq i$. Si i préfère x_j à x_i, alors il n'exerce pas ce pouvoir.

Si, par exemple, 2 est le seul qui manifeste ses propositions en proposant x_2, alors l'issue sociale sera $\{x_2\}$. C'est-à-dire que la seule $E-$configuration active (possible de faire opposition contre un état social) est $(\{2\}, \{x_2\})$. Le silence de 1 peut se traduire par une préférence de x_2 à x_1 ou tout simplement par une non-action de sa part. Par contre, si 1 propose x_1, donc l' $E-$configuration active, qui est d'ordre 2, est $(\{1\}, \{2\}, \{x_1\}, \{x_2\})$, alors l'intersection des propositions d'issue sociale ou solution du jeu de ces deux joueurs est vide. Aucune alternative n'est donc sélectionnée.

Exemple 3.2 *Soit E un jeu à deux joueurs $\{1,2\}$ et à trois alternatives $\{x_1, x_2, x_3\}$ tel que $E(\{i\}) = \{\{x_i, x_{i+1}\}, \{x_1, x_2, x_3\}\}$.*

Ici, 1 n'a le pouvoir de bloquer que x_3 et 2 a seulement le pouvoir de bloquer x_1. Donc, x_2 est non opposable et fera toujours partie des propositions de 1 et de 2, quelles que soient leurs préférences. Dans ce cas, la réunion des alternatives rejetées par ces deux joueurs est un sous-ensemble strict de $\{x_1, x_2, x_3\}$.

Si nous augmentons le nombre de joueurs, alors chacun d'entre eux a la possibilité de choisir la coalition avec qui il veut agir contre telle ou telle alternative.

Exemple 3.3 *Soit E un jeu à trois joueurs $N = \{1,2,3\}$ et à trois alternatives $\{x_1, x_2, x_3\}$ tel que $E(\{i,j\}) = \{\{x_k\}, \{x_k, x_i\}, \{x_k, x_j\}, A\}$ et $E(\{i\}) = \{A\}$ ($i, j, k \in \{1,2,3\}$)*

Aucun joueur n'a le pouvoir de s'opposer contre une alternative. Donc, pour faire une objection, chaque joueur doit choisir un partenaire en fonction de ses objectifs. Par exemple, si 1 veut proposer x_3, il a intérêt à choisir 2 comme partenaire. Si 2 veut éviter x_1, il doit agir avec 3. Supposons que 3 veut aussi éviter x_1, et propose à 1 d'agir avec lui. Dans ce cas, les coalitions qui ont manifesté leurs intentions sur les issues sociales sont $S_1 = \{1,2\}$, $S_2 = \{2,3\}$ et $S_3 = \{1,3\}$. Ainsi, les propositions de 1 sont $\{x_2, x_3\}$ où x_2 est une action avec 3 et x_3 une action avec 2. Les propositions de 2 sont $\{x_1, x_3\}$ et celles de 3 sont $\{x_1, x_2\}$. A l'issue du jeu, aucune alternative n'obtient l'intention de proposition d'issue sociale de tous les joueurs. C'est-à-dire que si $B_k = \{x_{k+2}\}$, $k = 1,2,3 \mod 3$ nous avons :

$$\bigcap_{i \in N} \bigcup_{k | S_k \ni i} B_k = \emptyset$$

Ces trois exemples ont montré comment les joueurs choisissent leurs partenaires et comment on obtient l'issue sociale du jeu en fonction de la la structure de la $E-$configuration. La question qui nous occupe maintenant est celle des relations qu'il y a entre les propriétés de ces coopérations et l'instabilité. Par exemple, si les joueurs se partagent en famille de coalitions deux à deux disjoints, seront-ils en mesure de déstabiliser l'organisation ? Inversement, peut on décrire les propriétés des familles de coalitions qui peuvent agir en faveur de l'instabilité ? A cet effet, prenons l'exemple suivant :

Exemple 3.4 *Soient $n, m, a \in \mathbb{N}$ tels que $a \geq 2$ et $n = am$, et E_q la fonction d'effectivité définie sur $N = \{1, \ldots, n\}$ et $A = \{x_1, \ldots, x_m\}$ par $E_q(S) = \mathcal{P}_0(A)$ si et seulement si $|S| \geq q = n - a$.*

Notons que la fonction E est une représentation d'un vote à quota. Comme une fonction d'effectivité associé à un vote à quota est stable si et seulement si $\left\lceil \frac{n}{n-q} \right\rceil < m$ (B. Peleg (41)), alors E est stable.

Supposons que le profil des joueurs est connu et représenté par R^N tel que

$$\forall i \in N,\ R^i = R^{i+m} \text{ et pour tout } i = 1 \ldots m;\ \ x_{i-1}\ R^i\ \ldots x_k\ R^i\ x_1 \ldots R^i\ x_i$$

Considérons deux familles de coalitions ayant manifesté leurs intentions sur les issues sociales. Dans le premier cas, la famille satisfait la propriété de circularité, qui est en relation avec la stabilité comme nous l'avons démontré (50), alors que dans le second cas, la famille a une structure qui ne fait pas partie des catégories en relation avec la stabilité.

Première famille : Soit $S_j = a\left\{j, \ldots, j + \lfloor \frac{q}{a} \rfloor\right\}, j = 1 \ldots m$. Le nombre de joueurs de S_j est supérieur à q, alors $S_j \in \mathcal{W}(E_q)$. Supposons que S_j suggère l'état social x_{j-1} où $aX = \left\{j \mid \exists i \in X,\ R^i = R^j\right\}$. Alors $H^i = \left\{j \mid S_j \ni i\right\} = a\left\{i - \lfloor \frac{q}{a} \rfloor, \ldots, i\right\}$. Par consequent :

$$\begin{aligned}
\bigcap_{i \in N} \bigcup_{j \in H^i} B_j &= \bigcap_{i=1}^{m} \bigcup_{j \in aH^i} x_{j-1} \ ; \\
&= \bigcap_{i=1}^{m} a\left\{x_{i-\lfloor \frac{q}{a} \rfloor}, \ldots, x_i\right\} \ ; \\
&= \left\{x_{j-1} \mid j \in \bigcap_{j=1}^{m} S_j\right\}
\end{aligned}$$

Puisque l'intersection des coalitions d'une famille de coalitions gagnantes d'une fonction d'effectivité simple et stable est non vide, alors $\cap_{j=1}^{m} S_j \neq \emptyset$. D'où

$$\bigcap_{i \in N} \bigcup_{j \in H^i} B_j \neq \emptyset$$

Ce qui montre l'existence d'une alternative non opposée dans l' $E-$configuration $(S_1, \ldots, S_r, B_1, \ldots, B_r)$.

Deuxième famille : Supposons que les seules coalitions qui ont manifesté leurs intentions sont $S_1 = a\{1, \ldots, q\}$, $S_2 = a\{2, \ldots, q+1\}$ et $S_3 = N \setminus S_1 \cup S_2$. Si $H^i = \left\{j \mid S_j \ni i\right\}$, alors $H^1 = H^{1+m} = \{1\}, H^2 = H^{2+m} = \cdots = H^{\lfloor \frac{q}{a} \rfloor + m} = \{1, 2\}, H^{\lfloor \frac{q}{a} \rfloor + 1} = H^{\lfloor \frac{q}{a} \rfloor + m + 1} = \{2\}$ et pour tout $j \notin S_1 \cup S_2$, $H^j = \{3\}$. Les membres de S_3 n'ont aucun pouvoir, donc la seule proposition crédible de la coalition S_3 vaut A. Si par exemple S_1 propose x_m alors que S_2 propose x_1, nous avons :

$$\bigcap_{i \in N} \bigcup_{k \in H^i} B_k = \{x_m\} \cap \{x_m, x_1\} \cap \{x_1\} \cap A = \emptyset$$

Cette vacuité ne s'interprète pas ici que l'$E-$configuration $(S_1, S_2, S_3, B_1, B_2, B_3)$ est une menace contre la stabilité. En effet, si l'on oblige les coalitions de manifester leurs préférences sur les alternatives, il doit exister des joueurs qui n'arrivent pas à trouver une préférence rationnelle. L'hypothèse sur la rationalité des joueurs entraîne que l'$E-$configuration $(S_1, S_2, S_3, B_1, B_2, B_3)$ n'est pas un danger pour la stabilité.

Ainsi, certaines $E-$configuration ne nuisent pas à la stabilité malgré les pouvoirs et les intentions des coalitions membres.

Pour identifier la structure des familles de coalition nécessaire et suffisante *compatible* à un profil, nous allons commencer par attribuer à l'$E-$configuration $(S_1, \ldots, S_r, B_1, \ldots, B_r)$ la structure suivante :

(PG) La famille $\{S_1, \ldots, S_r\}$ est *une partition généralisée*. C'est-à-dire qu'il existe $\lambda_k > 0$ ($k = 1 \ldots r$) tels que

$$\forall i \in N : \sum_{k | S_k \ni i} \lambda_k = 1$$

(NV) La non vacuité des alternatives non-opposées :

$$\bigcap_{i \in N} \bigcup_{k | S_k \ni i} B_k \neq \emptyset$$

Rappelons que pour les jeux à utilités transférables (TU) : un couple (N, v) où N l'ensemble des joueurs et $v : \mathcal{P}_0(N) \longrightarrow \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, la stabilité est caractérisée par l'existence d'une alternative non-opposée si une famille de coalitions en partition généralisée se forme pour faire les objections. Une paire (S, y) est une objection contre $x \in \mathbb{R}^n$ si $v(S) \geq \sum_{i \in S} x_i$ et $y_i < x_i, \forall i \in S$. Donc, (N, v) est stable si et seulement si pour toute partition généralisée $(S_1, \ldots, S_r)$ de N, il existe x tel qu'aucune coalition S_k de la partition généralisée n'a le moyen de faire objection contre x. On remarque que (NV) est une version ensembliste de (PG), mais cela ne prouve aucune évidence de relation entre l'équilibre d'un jeu TU et l'équilibre d'une fonction d'effectivité.

Ainsi, si nous prenons l'intersection de toutes les intentions d'issues finales du jeu où les joueurs sont répartis dans une partition généralisée, nous obtenons la définition suivante :

Définition. *Une fonction d'effectivité $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ est dite équilibrée si pour toute partition généralisée de coalitions $\{S_1, \ldots, S_r\}$ et pour tout $B_k \in E(S_k)$, $k = 1 \ldots r$, nous avons :*

$$\bigcap_{i \in N} \bigcup_{k | S_k \ni i} B_k \neq \emptyset$$

Cette définition a été introduite pour la première fois par Kolpin(27) alors qu'il étudiait l'essence de la stabilité. Dans la suite, nous réécrivons cette définition afin qu'elle soit cohérente avec les notations du présent travail.

3.3 Équilibre et acyclicité

Pour une $E-$configuration $(S_1, \ldots, S_r, B_1, \ldots, B_r)$, nous associons les ensembles

$$D_i := D_i(S_1, \ldots, S_r, B_1, \ldots, B_r) = \bigcup_{k | S_k \ni i} B_k;$$

$$C_j := C_j(S_1, \ldots, S_r, B_1, \ldots, B_r) = \bigcap_{i \neq j} D_i$$

Étant donné une $E-$configuration $(S_1, \ldots, S_r, B_1, \ldots, B_r)$, l' ensemble D_i représente l'intention de $i \in S_1 \cup \cdots \cup S_r$ sur ce que doit être le statu quo.

Pour simplification, nous disons qu'une famille d'ensembles $(B_1, \ldots, B_r)$ satisfait NV (non-vacuité) si

$$D_1 \cap \cdots \cap D_n \neq \emptyset$$

C'est-à-dire que si la famille de coalitions $S_1, \ldots, S_r$ se forme pour obtenir une $E-$configuration, alors il existe $x \in D_1 \cap \cdots \cap D_n$ qui ne soit pas opposable. De la même manière, nous pouvons attribuer à la famille $(S_1, \ldots, S_r)$ les propriétés (P) et (P') suivantes :

Proposition 3.1 *Soit $S_1, \ldots, S_r \in \mathcal{P}(N)$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*
(P) *Il existe k tel que $S_k \neq \emptyset$ et $\forall i, j \in N : H^i \subset H^j \Rightarrow H^i = H^j$;*
(P') $S_1 \cup \cdots \cup S_r = N$ *et* $\forall i, j \in N : \; H^i \setminus H^j \neq \emptyset \Rightarrow H^j \setminus H^i \neq \emptyset$.

Preuve.
(P)$\Rightarrow$ (P'). Premièrement, si $S_1 \cup \cdots \cup S_r \neq N$, alors il existe $i_0 \in N$ tel que $H^{i_0} = \emptyset$. Donc, $H^{i_0} \subset H^i, \forall i \in N$. De (P), $H^1 = \cdots = H^n = \emptyset$ et $S_1 = \cdots = S_r = \emptyset$. Deuxièmement, si $H^i \setminus H^j \neq \emptyset$ alors que $H^j \setminus H^i = \emptyset$, alors $H^j \subset H^i$ et $H^j \neq H^i$. Donc, de (P), nous avons à la fois $H^j = H^i$ et $H^i \neq H^j$.
(P')$\Rightarrow$ (P). Évident.

□

Proposition 3.2 *Si la famille $\{S_1, \ldots, S_r\}$ est une partition généralisée de N, alors elle satisfait* (P)

Preuve. Si $\{S_1, \ldots, S_r\}$ ne satisfait pas (P), alors il existe $i \neq j$ tels que $H^i \setminus H^j \neq \emptyset$ alors que $H^j \setminus H^i = \emptyset$. Comme $\{S_1, \ldots, S_r\}$ est une partition généralisée, alors il existe $\lambda_k \in (0, 1)$ tel que

$$\forall i, j \in N : \sum_{k \in H^i} \lambda_k = \sum_{k \in H^j} \lambda_k = 1$$

C'est-à-dire que

$$\begin{aligned} \sum_{k \in H^i \setminus H^j} \lambda_k &= 1 - \sum_{k \in H^i \cap H^j} \lambda_k \\ &= \sum_{k \in H^j \setminus H^i} \lambda_k \end{aligned}$$

Ce qui est contraire à $\lambda_k > 0$, $H^i \setminus H^j \neq \emptyset$ et $H^j \setminus H^i = \emptyset$.

□

Proposition 3.3 *Si la famille $\{S_1, \ldots, S_r\}$ avec $r \leq 3$ satisfait (P), alors elle est une partition généralisée de N.*

Preuve :
Soient $r \leq 3$ et $\{S_1, \ldots, S_r\}$ une famille de coalitions satisfaisant (P).

Cas $r = 2$. Alors, S_1, S_2 est une partition de N ou $S_1 = S_2 = N$. Dans les deux cas, S_1, S_2 est une partition généralisée.

Cas $r = 3$. Nous distinguons trois cas.

Sous cas 1 : $H^i = H^j = H^k$. Alors, $S_k = N$. En choisissant $\lambda_k = \frac{1}{3}$, on conclut que $\{S_1, S_2, S_3\}$ est une partition généralisée.

Sous cas 2 : $\exists i \neq j : H^i = H^j$. Alors, on distingue deux cas. Premier cas, $H^i = \{k\}$ est un singleton. Comme $H^{i'} \subset \{1,2,3\}, \forall i' \neq i,j$ alors la propriété (P) entraîne $H^{i'} \subset \{1,2,3\} \setminus H^i, \forall i' \neq i,j$. Dans ce cas, il suffit de choisir $\lambda_k = 1$ et $\lambda_l = \frac{1}{2}$ pour $l \neq k$. Deuxième cas, $H^i = H^j = \{k,l\}$. La propriété (P) entraîne que pour tout $i' \neq i,j$, $H^{i'} \in \{\{k'\}, \{k',k\}, \{k',l\}\}$ avec $k' \neq k,l$. Si pour tout $i' \neq i,j$, $H^{i'} = \{k'\}$, on choisit $\lambda_{k'} = 1$ et $\lambda_k = \lambda_l = \frac{1}{2}$. Si pour tout $i' \neq i,j$, $H^{i'} = \{k',k\}$ (resp $H^{i'} = \{k',l\}$), on choisit $\lambda_k = \frac{1}{3}$ et $\lambda_l = \lambda_{k'} = \frac{2}{3}$ (resp. $\lambda_l = \frac{1}{3}$ et $\lambda_k = \lambda_{k'} = \frac{2}{3}$). Dans les autres cas, $H^i \in \{\{k,l\}, \{k',k\}, \{k',l\}\}, \forall i \in N$, donc on choisit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$.

Sous cas 3 : $\exists i,j,i' : H^i \neq H^j \neq H^{i'}$. Dans ce cas, la propriété (P) implique que H^i sont tous égaux à un singleton ou sont dans $\{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,1\}\}$. Dans les deux cas, $\{S_1, S_2, S_3\}$ est une partition généralisée.

□

Définition 3.1 *Une fonction d'effectivité $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ est équilibrée si pour toute $E-$configuration $(S_1, \ldots, S_r, B_1, \ldots, B_r)$ telle que $\{S_1, \ldots, S_r\}$ soit une partition généralisée, alors $(B_1, \ldots, B_r)$ satisfait NV.*

Si E n'est pas équilibrée, alors il existe $r \geq 1$ et une $E-$configuration $(S_1, \ldots, S_r, B_1, \ldots, B_r)$ telle que $\{S_1, \ldots, S_r\}$ soit une partition généralisée alors que $D_1 \cap \cdots \cap D_n = \emptyset$. Dans ce cas, nous disons que E possède une structure de *déséquilibre d'ordre r*.

Définition 3.2 *Une fonction d'effectivité $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ est fortement équilibrée si pour toute $E-$configuration $(S_1, \ldots, S_r, B_1, \ldots, B_r)$ telle que $\{S_1, \ldots, S_r\}$ satisfait (P), alors $(B_1, \ldots, B_r)$ satisfait NV.*

Si E n'est pas fortement équilibrée, alors il existe $r \geq 1$ et $E-$configuration $(S_1, \ldots, S_r, B_1, \ldots, B_r)$ telle que $\{S_1, \ldots, S_r\}$ satisfait (P)alors que $D_1 \cap \cdots \cap D_n = \emptyset$. Dans ce cas, nous disons que E possède une structure de *déséquilibre faible d'ordre r.*

De la proposition 3.2, il est évident que si une fonction d'effectivité E est fortement équilibrée alors elle est équilibrée. D'une autre manière, si elle admet une structure de déséquilibre alors elle admet une structure de déséquilibre faible ; mais la réciproque est fausse. Cependant, dans les propositions suivantes, pour certains cas, ces deux structures sont équivalentes et ont la même propriété que le cycle 2.1

Proposition 3.4 *Soit $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité monotone. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) *E admet une structure de déséquilibre faible d'ordre $\tau \leq 3$;*
(ii) *E admet une structure de déséquilibre d'ordre $\rho \leq 3$;*
(iii) *E admet un cycle d'ordre $r \leq 3$.*

Preuve :

(i)⇒(ii). De la proposition 3.3.

(ii)⇒(i). De la proposition 3.2.

(ii)⇒(iii). Soit $(S_1,\ldots,S_r,B_1,\ldots,B_r)$ une $E-$configuration telle que $\{S_1,\ldots,S_r\}$ soit une partition généralisée et $D_1\cap\cdots\cap D_n=\emptyset$.

Cas où $r=2$. Alors, la famille $\{S_1,S_2\}$ est une partition de N et $B_1\cap B_2=\emptyset$. Ce qui donne un cycle d'ordre 2 de base (C_1,C_2) où $C_1\subset B_1^c$ et $C_2\subset B_2^c$.

Cas où $r=3$. Il y a deux cas, $\{S_1,S_2,S_3\}$ est une partition de N ou $\{S_1\cap S_2,S_2\cap S_3,S_3\cap S_1\}$ est une partition de N. Comme (B_1,B_2,B_3) ne satisfait pas NV, alors dans le premier cas nous avons $B_1\cap B_2\cap B_3=\emptyset$, ce qui donne un cycle inférieur ; et dans le deuxième cas, nous avons C_1,C_2,C_3 sont deux à deux disjoints, avec $C_k=(B_{k-1}\cup B_k)\cap(B_k\cup B_{k+1})$ $(k=1\ldots3 \mod 3)$. En outre, $C_k\cap(B_{k-1}\cup B_{k+1})=\emptyset$, alors si on remplace C_1 par $C_1\cup[A\setminus(B_1\cup B_2\cup B_3)]$, ce qui est faisable car E est monotone, alors nous obtenons un cycle d'ordre 3.

(iii)⇒(ii). Soit $(S_1,\ldots,S_\rho,B_1,\ldots,B_\rho)$ un cycle d'ordre ρ de base $(C_1,\ldots,C_\rho)$.

Cas où $r=2$. De la définition d'un cycle, $S_1\cap S_2=\emptyset$ et $B_1\cap B_2=\emptyset$. Donc, la famille $\{S_1,S_2,S_3=N\setminus(S_1\cup S_2)\}$ est une partition de N ; en particulier elle est une partition généralisée. Comme $B_3=A\in E(S_3)$, alors

$$\begin{aligned}\bigcup_{i\in N}\left(\bigcap_{k|S_k\ni i}B_k\right)&=B_1\cap B_2\cap B_3\ ;\\&=B_1\cap B_2\ ;\\&=\emptyset\end{aligned}$$

Ce qui montre que (S_1,S_2,S_3,B_1,B_2,A) est une structure de déséquilibre d'ordre 3 (Si $S_1\cup S_2=N$, (S_1,S_2,B_1,B_2) est une structure de déséquilibre d'ordre 2).

Cas où $\rho=3$. De la monotonie de E, nous pouvons supposer que $S_1\cup S_2\cup S_3=N$. Du corollaire 2.1 (Chapitre 2), l'$E-$configuration $(S_1,S_2,S_3,B_1,B_2,B_3)$ est un cycle supérieur ou un un cycle inférieur. Si elle est un cycle supérieur, alors S_1,S_2,S_3 forment une partition de N, donc une partition généralisée. Dans ce cas, pour tout $i\in N$, H^i est un singleton. Ce qui implique que $D_1\cap\cdots\cap D_n=B_1\cap B_2\cap B_3=\emptyset$. Donc, $\{B_1,B_2,B_3\}$ satisfait (NV). Par contre, si $(S_1,S_2,S_3,B_1,B_2,B_3)$ est un cycle inférieur, nous distinguons deux cas. Premier cas, il existe $k\neq l$ tels que $S_k\cap S_k=\emptyset$. Comme $B_k\cap B_l=\emptyset$, alors nous revenons au cas où $\rho=2$. Deuxième cas, $S_k\cap S_l\neq\emptyset,\forall k\neq l$. Comme $S_1\cup S_2\cup S_3=N$, alors $S_1\cap S_2$, $S_2\cap S_3$, $S_1\cap S_1$ est une partition de N. C'est à dire que $\{S_1,S_2,S_3\}$ est une partition généralisée de N. En outre pour tout $i\in N$, $H^i=\{k,k+1\}$ $((k=1\ldots3 \mod 3))$, alors $D_1\cap\cdots\cap D_n=(B_1\cup B_2)\cap(B_2\cup B_3)\cap(B_3\cup B_1)=\emptyset$, i.e. $\{B_1,B_2,B_3\}$ satisfait (NV).

En conclusion, $(S_1,S_2,S_3,B_1,B_2,B_3)$ est une structure de déséquilibre d'ordre 3.

□

Proposition 3.5 *Soient* $E:\mathcal{P}(N)\longrightarrow\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ *une fonction d'effectivité et* $(S_1,\ldots,S_r,B_1,\ldots,B_r)$ *une* $E-$*configuration telle qu'il existe* $(C_1,\ldots,C_r)$

une partition de A, $(T_1, \ldots, T_r)$ une partition de N et $c < r$ tels que $\forall k = 1 \ldots r$ mod *r :*

$$B_k = C_k \cup \cdots \cup C_{k+c-1} \text{ et } S_k = T_{k+c} \cup \cdots \cup T_{k-1}$$

Alors

1. *$(S_1, \ldots, S_r, B_1, \ldots, B_r)$ est une structure de déséquilibre d'ordre r ;*
2. *$(S_1, \ldots, S_r, B_1, \ldots, B_r)$ est un cycle d'ordre r ;*

Preuve : Soient $(S_1, \ldots, S_r, B_1, \ldots, B_r)$ une $E-$configuration, $(T_1, \ldots, T_r)$ une partition de N, $(C_1, \ldots, C_r)$ une partition de A et $c < r$ tels que

$$\forall k = 1 \ldots r;\ C_k \cup \cdots \cup C_{k+c-1} \in E(T_{k+c} \cup \cdots \cup T_{k-1}) \tag{3.1}$$

(i) De l'équation 3.1, $|\{k|S_k \ni i\}| = c$ alors $(S_1, \ldots, S_r)$ est une partition généralisée avec $\lambda_k = \frac{1}{c}, \forall k = 1 \ldots r$. En outre, pour tout $l = 1 \ldots r$ et pour tout $i \in T_l$, $\{k|S_k \ni i\} = \{k|\{k+c, \ldots, k-1\} \ni l\} = \{l-c, \ldots, l+1\}$. Alors,

$$\begin{aligned}
\bigcap_{i \in N} \bigcup_{k|S_k \ni i} B_k &= \bigcap_{l=1 \ldots r} \bigcap_{i \in T_l} \bigcup_{k|J_k \ni l} B_k \\
&= \bigcap_{l=1}^{r} \bigcap_{k=l-c}^{l+1} B_k \\
&= \bigcap_{l=1}^{r} \bigcap_{k=l-c}^{l+1} \bigcup_{p=k}^{k+c-1} C_l \\
&\subset \bigcap_{l}^{r} \bigcup_{k \in \{l\}^c} C_k = \emptyset
\end{aligned}$$

(ii) La proposition 2.4 (Chapitre 2)

□

Le théorème 3.1 suivant montre que le cycle peut avoir une formulation assez proche d'une structure de déséquilibre.

Rappel. *Une sélection sur un ensemble $\{1, \ldots, r\}$ est une application θ : $\mathcal{P}_0(\{1, \ldots, r\}) \to \{1, \ldots, r\}$ telle que pour tout $K \subset \{1, \ldots, r\}$, $\theta(K) \in K$.*

Notons Σ_r l'ensemble de toutes les sélections sur $\{1, \ldots, r\}$. Pour une famille de coalitions $\{S_1, \ldots, S_r\}$ et une sélection $\theta \in \Sigma_r$, nous associons les ensembles

$$\mathcal{K}_l := \mathcal{K}_l(S_1, \ldots, S_r) = \{K \subset \{1, \ldots, r\} \mid \cap_{k \in K} S_k \neq \emptyset, K \ni l\};$$
$$\mathcal{J}_k := \mathcal{J}_k(S_1, \ldots, S_r, \theta) = \{K \subset \{1, \ldots, r\} \mid \cap_{k \in K} S_k \neq \emptyset, \theta(K) = k\}$$

Posons

$$J_k = \bigcup_{K|\theta(K)=k} K$$

Théorème 3.1 *Soit $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ une fonction d'effectivité. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe une partition de A, $(C_1, \dots, C_r)$ telle que $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$ soit un cycle d'ordre r de base $(C_1, \dots, C_r)$;*

(ii) *il existe $\theta \in \Sigma_r$ tel que la famille $B_1, \dots, B_r$ satisfasse :*

$$\bigcap_{l=1}^{r} \bigcup_{K \in \mathcal{K}_l} B_{\theta(K)} = \emptyset \tag{3.2}$$

(iii) *il existe $\theta \in \Sigma_r$ tel que la famille $B_1, \dots, B_r$ satisfasse :*

$$\bigcap_{l=1}^{r} \bigcup_{k \in J_l} B_k = \emptyset \tag{3.3}$$

Preuve :

(i)⇒(ii) Soit $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$ un cycle d'ordre r et $(C_1, \dots, C_r)$ sa base, et soit $\theta \in \Sigma_r$ tel que : Si $\cap_{k \in K} S_k \neq \emptyset$, alors $\theta(K) = k \in K$ avec $B_k \cap C_l = \emptyset, \forall l \in K$. Si $\cap_{k \in K} S_k = \emptyset$, $\theta(K) \in K$ est arbitraire. Alors, $B_{\theta(K)} \subset \cup_{l \notin K} C_l$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \bigcap_{l=1}^{r} \bigcup_{K \in \mathcal{K}_l} B_{\theta(K)} &\subset \bigcap_{l=1}^{r} \bigcup_{K \in \mathcal{K}_l} \bigcup_{t \notin K} C_t \\ &\subset \bigcap_{l=1}^{r} C_l^c = \emptyset \end{aligned}$$

(ii)⇒(i) Soit une $E-$ configuration $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$ telle qu'il existe $\theta \in \Sigma_r$ tel que $(B_1, \dots, B_r)$ satisfasse 3.2. Posons

$$C_l = \bigcap_{K \in \mathcal{K}_l} B^c_{\theta(K)},$$

et soit $\bar{K} \subset \{1, \dots, r\}$ tel que $\cap_{k \in \bar{K}} S_k \neq \emptyset$. Comme pour tout $l \in K$ nous avons $K \in \mathcal{K}_l$, alors $C_l \subset B^c_{\theta(\bar{K})}$ ($l \in K$). Ce qui donne :

$$\forall l \in K : \; C_l \cap B_{\theta(\bar{K})} = \emptyset$$

(i)⇒ (iii) Soit $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$ un cycle de base $C_1, \dots, C_r$. De la définition du cycle 2.1 (C2b) nous avons : pour tout $K \subset \{1, \dots, r\}$, il existe $\theta(K) \in K$ tel $C_{\theta(K)} \cap B_k = \emptyset, \forall k \in K$. Ce qui donne :

$$\forall K \text{ tel que } \theta(K) = l : C_l \cap \bigcup_{k \in J_l} B_k = \emptyset$$

Par conséquent :

$$\bigcap_{l=1}^{r} \bigcup_{k \in J_l} B_k \subset \bigcap_{l=1}^{r} C_l^c = \emptyset$$

(iii)⇒ (i)Soit $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$ une $E-$ configuration telle que la famille $(B_1, \dots, B_r)$ satisfasse l'équation 3.3. Posons

$$C_l = \cap_{k \in J_l} B_k^c$$

alors pour tout K tel que $\cap_{k \in K} S_k \neq \emptyset$, nous avons $C_{\theta(K)} \cap B_k = \emptyset, \forall k \in K$. Donc, $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$ est un cycle de base $(C_1, \dots, C_r)$.

□

Notons que la version (i) permet d'analyser l'instabilité alors que (ii) et (iii) sont dans l'esprit de localiser les issues sociales stables. Ici, la formulation (iii) qui met en évidence la similarité d'un cycle avec une structure de déséquilibre ne permet pas de conclure qu'il y ait une équivalence entre les deux. Plus précisément, ces deux structures ne sont pas équivalentes. L'objet du paragraphe suivant est de répondre à cette question dans l'optique de trouver des classes de fonctions d'effectivité où la stabilité, l'acyclicité, l'équilibre et l'équilibre fort sont équivalents.

3.4 Les théorèmes d'équivalences

Le résultat de Kolpin (27) affirme qu'une fonction d'effectivité équilibrée est stable. Donc, une fonction d'effectivité fortement équilibrée est stable ; mais l'existence de structure de déséquilibre n'assure pas l'instabilité de la fonction d'effectivité. Cependant, il existe une classe de fonctions d'effectivité où la réciproque est vraie. Par exemple, Mizutani (30) a montré que pour les fonctions d'effectivité monotones, anonymes et neutres l'existence d'une structure de déséquilibre conduit à l'instabilité. Dans ce paragraphe, nous montrons que l'existence de structure de déséquilibre faible est suffisante pour l'instabilité d'une fonction d'effectivité monotone, anonyme et neutre et proposons d'autres classes de fonctions d'effectivité pour lesquelles l'équilibre fort, l'équilibre et la stabilité sont équivalents.

À cet effet, rappelons les résultats suivants :

Théorème 3.2 (Keiding,1985(24)) *Soit $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité. Alors, la fonction E est acyclique si et seulement si elle est stable.*

Théorème 3.3 (Kolpin, 1991 (27)) *Soit $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité. Si la fonction E est équilibrée alors elle est stable.*

De la proposition 3.2, nous avons également :

Théorème 3.4 *Soit $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité. Si la fonction E est fortement équilibrée alors elle est stable.*

Les réciproques de ces deux derniers théorèmes sont fausses. On peut faire référence aux travaux de Mizutani, 1994 (30) ou à l'exemple ci-après. Cette fonction est stable sans être équilibrée.

Exemple 3.5 *Soient $N = \{1, \ldots, 5\}$ et $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(N))$ la fonction d'effectivité définie comme suit :*

$E(S) = \{T \mid T \supset (N \setminus S)\}$ si $S \in \{S \mid S \supset S_k, k = 1 \ldots r\}$ et $E(S) = \{N\}$ sinon ; avec $S_1 = \{1,2,3,5\}$, $S_2 = \{2,4\}$, $S_3 = \{1,3,4\}$, $S_4 = \{1,2,5\}$, $S_5 = \{3,4,5\}$.

E admet une structure de déséquilibre d'ordre 5. Nous avons :

$$\forall k = 1 \ldots 5 : |\, \{k | J_k \ni k\} \,| = 3 \qquad (3.4)$$

alors la famille de coalitions $\{S_1, \ldots, S_5\}$ est une partition généralisée. Soit $B_k = S_k^c$ et posons $H = \{k \mid S_k \ni i\}$ et $D_k = \cup_{k \in H^i} B_k$, alors

$$\begin{array}{l} H^1 = \{1,3,4\} \quad H^2 = \{1,2,4\} \quad H^3 = \{1,3,5\} \\ H^4 = \{2,3,5\} \quad H^5 = \{1,4,5\} \\ D_k = N \setminus \{k\} \quad k = 1 \ldots 5 \end{array}$$

Par conséquent :

$$\bigcap_{i \in N} \bigcup_{k|S_k \ni i} B_k = \bigcap_{i \in N} (N \setminus \{i\}) = \emptyset$$

E ne possède aucun cycle d'ordre 5 : Nous vérifions seulement que E ne possède pas une configuration équilibrée d'ordre 5. Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1 &= \Big\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, H^1, H^2, H^5\Big\} \\ \mathcal{K}_2 &= \Big\{\{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, H^2, H^4\Big\} \\ \mathcal{K}_3 &= \Big\{\{3\}, \{3,1\}, \{3,2\}, \{3,4\}, \{3,5\}, H^1, H^3, H^4\Big\} \\ \mathcal{K}_4 &= \Big\{\{4\}, \{4,1\}, \{4,2\}, \{4,3\}, \{4,5\}, H^1, H^2, H^5\Big\} \\ \mathcal{K}_5 &= \Big\{\{5\}, \{5,1\}, \{5,2\}, \{5,3\}, \{5,4\}, H^1, H^3, H^4, H^5\Big\} \end{aligned}$$

On peut vérifier que pour toute sélection $\theta \in \Sigma_r$,

$$\bigcap_{i \in N} \bigcup_{K \in \mathcal{K}_i} B_{\theta(K)} \neq \emptyset$$

Théorème 3.5 *Soit $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité monotone, anonyme et neutre. Alors, E est stable si et seulement si E est fortement équilibrée.*

Preuve : Si E est fortement équilibrée, alors elle est stable (Théorème 3.4). Réciproque. Nous savons qu'une fonction d'effectivité monotone, anonyme et neutre est stable si et seulement elle admet un cycle circulaire 2.3 (Chapitre 2), c'est-à-dire qu'il existe $(C_1, \ldots, C_r)$ une partition de A, $T_1, \ldots, T_r$ une partition de N et $1 \leq c \leq r-1$ tels que

$$\forall k = 1 \ldots r \mod r : C_k \cup \cdots \cup C_{k+c-1} \in E(T_{k+c} \cup \cdots \cup C_{k-1})$$

De la proposition 3.5, l'$E-$configuration $(S_1, \ldots, S_r, B_1, \ldots, B_r)$ avec $S_k = T_{k+c} \cup \cdots \cup C_{k-1}$ et $B_k = C_k \cup \cdots \cup C_{k+c-1}$ est une structure de déséquilibre faible.

□

Ce théorème a pour corollaire le résultat de Mizutani suivant :

Corollaire 3.1 *[Mizutani, 1994] Soit $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité monotone, anonyme et neutre. Alors, E est stable si et seulement si E est équilibrée.*

Nous avons également le résultat suivant :

Théorème 3.6 *Soit $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité monotone et simple. Alors, la fonction E est stable si et seulement si elle est fortement équilibrée.*

PREUVE : $\Rightarrow$ Si E est fortement équilibrée, alors E est stable (théorème 3.4). $\Leftarrow$ Soit $(S_1, \ldots, S_r, B_1, \ldots, B_r)$ une structure de déséquilibre faible sur E. Alors, la famille $\{S_1, \ldots, S_r\}$ satisfait (P) et la famille $\{B_1, \ldots, B_r\}$ est telle que $D_1 \cap \cdots \cap D_n = \emptyset$. Puisque $B_k \neq A$ entraîne $S_k \in \mathcal{W}(E)$, alors si pour tout $k = 1 \ldots r$, $B_k \neq A$ nous obtenons $S_1, \ldots, S_r \in \mathcal{W}(E)$. Or, l'intersection des ensembles d'une famille satisfaisant (P) est vide, alors d'après le théorème de Nakamura (34), E est instable. Admettons alors qu'il existe $p < r$ tel que $B_1, \ldots, B_p \neq A$ et $B_{p+1} = \cdots = B_r = A$. Si $S_1 \cap \cdots \cap S_p = \emptyset$, alors d'après le théorème de Nakamura (34), E est instable. Si $S_1 \cap \cdots \cap S_p \neq \emptyset$, alors il existe i_0 tel que

$$H^{i_0} \supset \{1, \ldots, p\}$$

Posons $Z = \left\{i \mid H^i \cap \{p+1, \ldots, r\} = \emptyset\right\}$. Alors, pour tout $i \notin Z$, il existe $k \in H^i$ tel que $B_k = A$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
\bigcap_{i \in N} \bigcup_{k|S_k \ni i} B_k &= \left(\bigcap_{i \in Z} \bigcup_{k|S_k \ni i} B_k\right) \cap \left(\bigcap_{i \notin Z} \bigcup_{k|S_k \ni i} B_k\right) \\
&= \left(\bigcap_{i \in Z} \bigcup_{k|S_k \ni i} B_k\right) \cap A \\
&= \bigcap_{i \in Z} \bigcup_{k|S_k \ni i} B_k
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Donc

$$\bigcap_{i \in Z} \bigcup_{k|S_k \ni i} B_k = D_1 \cap \cdots \cap D_n = \emptyset \tag{3.6}$$

Comme $B_k \neq \emptyset$ $(k = 1 \ldots r)$, alors l'équation 3.6 entraîne qu'il existe au moins $i \in Z$ tel que $H^i \subsetneq \{1, \ldots, p\}$. C'est-à-dire que

$$H^i \subsetneq H^{i_0}$$

Ce qui est contraire à (P).

□

Ainsi, nous avons :

Corollaire 3.2 *Soit $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité monotone et simple. Alors, la fonction E est stable si et seulement si elle est équilibrée.*

Les fonctions d'effectivité simples, ou anonymes et neutres sont des cas particuliers des *fonctions d'effectivité décomposable* : il existe deux jeux à utilités transférables normés (N, ν) et (A, ω) tels que

$$B \in E(S) \Leftrightarrow \omega(B) \leq 1 - \nu(S) \tag{3.7}$$

Donc la proposition 3.6 et le théorème 3.1 peuvent être considérés comme le prolongement de la caractérisation de la stabilité des jeux à utilités transférables. Le style de démonstration de Mizutani & al. prouve bien ce référencement. Pourtant, il n'est pas évident que l'équilibre du pouvoir puisse caractériser la stabilité d'une fonction d'effectivité décomposable [1].

1. Dans (35), si les deux jeux à utilités transférables associés à la fonction d'effectivité sont équilibrés, alors cette dernière est stable. La question à savoir si l'équilibre des jeux à utilités transférables entraîne l'équilibre de la fonction d'effectivité associée, et que cela caractérise la stabilité est une question encore ouverte.

Dans la suite, nous nous intéressons à une classe de fonctions d'effectivité qui n'est pas une sous-classe de fonctions d'effectivité décomposables. C'est-à-dire que la notion d'équilibre de pouvoir ne se limite pas aux jeux TU et ses dérives. Rappelons qu'une fonction d'effectivité maximale satisfait $B \notin E(S) \Rightarrow A \setminus B \in E(N \setminus S)$: si une coalition S n'est pas effective pour B, alors son complémentaire aura le pouvoir de le bloquer. D'une autre manière, si une coalition est faible, pour éviter la perte inutile des actions possibles, on donne à son complémentaire le droit d'agir. Donc, en cas d'instabilité, la maximalisation qui consiste à remplacer la fonction d'effectivité par la plus petite fonction d'effectivité maximale qui la contient, intensifie l'exposition de l'organisation aux conflits. La maximalité aide également à la mise en évidence des conflits d'origine structurelle d'une organisation représentée par la fonction d'effectivité (cf (50)).

Les fonctions d'effectivité maximales ne sont pas alors une sous-classe de fonctions d'effectivité décomposables alors que le théorème **??** montre qu'il y a une équivalence entre l'équilibre fort et la stabilité pour cette classe de jeu. Tout d'abord, nous avons le lemme suivant :

Lemme 3.1 *Soit $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité monotone et maximale qui admet une structure de déséquilibre faible telle que $C_j \neq \emptyset, \forall j \in N$. Alors, E est instable.*

Preuve :

Montrons qu'il existe une partition $C_1^t, \ldots, C_n^t$ de A telle que pour tout $k = 1 \ldots r$: $\cup_{i \notin S_k} C_k^t \in E(S_k)$.

Par hypothèse, $D_1 \cap \cdots \cap D_n = \emptyset$ et $C_j \neq \emptyset$, alors $C_1, \ldots, C_n$ sont deux à deux disjoints. Posons

$$A \setminus [C_1 \cup \cdots \cup C_n] = \{x_1, \ldots, x_t\}$$

De la définition de C_j, il existe $i_1 \in N$ tel que

$$x_1 \notin D_{i_1} \tag{3.8}$$

et remplaçons $\{B_1, \ldots, B_r\}$ par $\left\{B_1^1, \ldots, B_r^1\right\}$ telle que

$$\begin{aligned} &\forall k \in H^{i_1} : B_k^1 = B_k \,; \\ &\forall k \notin H^{i_1} : B_k^1 = B_k \cup \{x\} \,. \end{aligned}$$

Comme pour tout $j \in N$, $C_j \neq \emptyset$ alors

$$\forall i \neq j : H_i \neq H_j \tag{3.9}$$

Donc, de la condition (P), nous avons :

$$\forall i \neq j : H^i \setminus H^j \neq \emptyset \text{ et } H^j \setminus H^i \neq \emptyset \tag{3.10}$$

Ce qui entraîne que pour tout $i \neq i_1$, il existe $k \in H^i$ tel que $x_1 \in B_k^1$. Alors :

$$D_{i_1}^1 = D_{i_1} \ \text{ et } \ x_1 \in D_i^1, \forall i \neq i_1 \tag{3.11}$$

Des equations 3.8 et 3.11, nous avons :

$$C_{i_1}^1 = C_{i_1} \cup \{x_1\} \ \text{ et } C_i^1 = C_i, \forall i \neq i_1 \tag{3.12}$$

Par conséquent, $D_1^1 \cap \cdots \cap D_n^1 = \emptyset$, $C_1^1, \ldots, C_n^1$ sont deux à deux disjoints et $A \setminus [C_1^1 \cup \cdots \cup C_n^1] = \{x_2, \ldots, x_t\}$.

Soit alors $(B_k^s)_{1 \leq s \leq t}$ la suite définie par :

$$\forall k \in H^{i_s} : B_k^s = B_k^{s-1} \; ;$$
$$\forall k \notin H^{i_s} : B_k^s = B_k^{s-1} \cup \{x_s\} \, .$$

Avec i_s tel que $x_s \notin D_{i_s}^{s-1}$.
Par un même raisonnement, nous pouvons conclure que pour tout $s = 1 \ldots t$: $D_1^s \cap \cdots \cap D_n^s = \emptyset$, $C_1^s, \ldots, C_n^s$ sont deux à deux disjoints et $A \setminus [C_1^s \cup \cdots \cup C_n^s] = \{x_{s+1}, \ldots x_t\}$. En particulier, au rang t, $C_1^t, \ldots, C_n^t$ est une partition de A. Par conséquent, au rang t, nous avons :

$$\forall j \in S_k : B_k^t \cap C_j^t \subset \left(\bigcup_{k \in H^j} B_k^t \right) \cap C_j = \emptyset,$$

C'est-à-dire que $B_k \subset B_k^t \subset \cup_{j \notin S_k} C_j^t$. De la monotonie de E, $B_k \in E(S_k)$ entraîne

$$\forall k = 1 \ldots r : \bigcup_{j \notin S_k} C_j^t \in E(S_k) \tag{3.13}$$

Montrons qu'il existe $R^N \in \mathcal{L}(A)^N$ tel que $\mathcal{C}(E, R^N) = \emptyset$

De la maximalité de E nous avons :

$$\forall j \in N, \; A \setminus C_j^t \in E(\{j\}) \text{ ou } C_j^t \in E(N \setminus \{j\})$$

Sans nuire à la généralité, supposons que pour un p, $0 \leq p \leq n$ nous avons :

$$\forall j = 1 \ldots p; \;\; A \setminus C_j^t \in E(\{j\}) \text{ et } \forall j = p+1 \ldots n; \;\; C_j^t \in E(N \setminus \{j\}) \tag{3.14}$$

Si $p = n$, i.e. pour tout $j \in N$, $A \setminus C_j^t \in E(\{j\})$, alors $(\{1\}, \ldots, \{n\}, A \setminus C_1^t, \ldots, A \setminus C_n^t)$ est un cycle supérieur d'ordre n. Donc, E est instable (5).

Si $p = 0$, i.e. pour tout $j \in N$, $C_j \in E(N \setminus \{j\})$, alors E possède un cycle inférieur d'ordre n. Pour les définitions des cycles inférieurs et cycles supérieurs, voir par exemple (5) ou (50). Donc, E est instable (5).

Supposons que $0 < p < n$. Comme $S_1 \cup \cdots \cup S_r = N$, alors on peut choisir $S \in \{S_1, \ldots, S_r\}$ tel que $n \in S$. Soit $R = (R^1, \ldots, R^n)$ un profil satisfaisant

$$\forall j \in N : \; C_{j-1}^t \; R^j \; \ldots \; R^j \; C_{j+1}^t \; R^j \; C_j^t$$

Donc la structure de R^N est définie comme suit

$$\begin{array}{ccccc}
C_n^t & \ldots & C_{p-1}^t & \ldots & C_{n-1}^t \\
\vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\
C_2^t & \ldots & C_{p+1}^t & \ldots & C_1^t \\
C_1^t & \ldots & C_p^t & \ldots & C_n^t \\
R^1 & \ldots & R^p & \ldots & R^n
\end{array}$$

Alors,

(α) Pour $i = 1 \dots p$, nous avons :

$$\forall j \neq i : \; C_j^t \; R^i \; C_i \text{ i.e. } [A \setminus C_i^t] \; R^i C_i$$

De l'équation 3.14, $(\{i\}, A \setminus C_i^t)$ est une objection contre tout $x \in C_i^t$.

(β) Pour $i = p + 1 \dots n$, nous avons :

$$\forall j \neq i : \; C_i^t \; R^j \; C_{i-1}^t$$

De l'équation 3.14, $(\{i\}^c, C_i^t)$ est une objection contre tout $x \in C_{i-1}^t$.

(γ) Pour tout $i \in S$, et pour tout $j \notin S$ nous avons $C_j^t \; R^i \; C_i^t$. Comme $n \in S$, alors nous avons en particulier

$$\forall i \in S, \; \forall j \notin S : \; C_j^t \; R^i C_n^t$$

De l'équation 3.13 $(S, \cup_{j \notin S} C_j^t)$ est une objection contre tout $x \in C_n^t$.

Étant donné que $C_1^t, \dots, C_n^t$ et une partition de A, alors pour tout $x \in A$, il existe $j \in N$ tel que $x \in C_j^t$ et une paire $(S(j), B(j))$ telle que $B(j) \; R^i \; x, \forall i \in S(j)$. D'où l'instabilité de E.

□

Théorème 3.7 *Soit $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité monotone et maximale. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) *E est fortement équilibrée ;*
(ii) *E est équilibrée ;*
(iii) *E est stable.*

Preuve : (i)⇒(ii) découle de la proposition 3.2 et (ii)⇒(iii) découle du théorème 3.4. Donc, il nous reste à démontrer que (iii)⇒(i).

En effet, soit $(S_1, \dots, S_r, B_1, \dots, B_r)$ une structure de déséquilibre faible sur E. Alors, $\{S_1, \dots, S_r\}$ satisfait (P) et la famille $(B_1, \dots, B_r)$ satisfait $D_1 \cap \dots \cap D_n = \emptyset$. Si pour tout $j \in N$, $C_j \neq \emptyset$, alors E est instable (Lemme 3.1). Admettons alors que E est stable et qu'il existe $j \in N$ tel que $C_j = \emptyset$. C'est-à-dire que :

$$\bigcap_{i \neq j} \bigcup_{k | S_k \ni i} B_k = \emptyset \tag{3.15}$$

Définissons la fonction d'effectivité $E_j : \mathcal{P}(N \setminus \{j\}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ telle que

$$E_j(\emptyset) = \emptyset \text{ et } \forall S \in \mathcal{P}_0(N \setminus \{j\}) : \quad E_j(S) = E(S \cup \{j\})$$

Montrons que si E est stable, alors E_j est maximale et convexe

Premièrement, E_j est maximale. Soient $S \in \mathcal{P}_0(N \setminus \{j\})$ et $B \in \mathcal{P}_0(A)$ tels que $B \notin E_j(S)$. Donc, $B \notin E(S \cup \{j\})$. De la maximalité de E, $A \setminus B \in E((N \setminus \{j\}) \setminus S)$. Comme E est monotone, alors $A \setminus B \in E([(N \setminus \{j\}) \setminus S] \cup \{j\})$. Ce qui montre que $A \setminus B \in E_j((N \setminus \{j\}) \setminus S)$. Donc, E_j est maximale.

Deuxièmement, E_j est convexe. Soient $S, T \in \mathcal{P}_0(N \setminus \{j\})$ et $B, C \in \mathcal{P}_0(A)$ tels que $B \in E_j(S)$ et $C \in E_j(T)$. Donc, $B \in E(S \cup \{j\})$ et $C \in E(T \cup \{j\})$. Comme la fonction E est maximale et stable, donc convexe, alors $B \cup C \in E((S \cup T) \cup \{j\})$ ou $B \cap C \in E((S \cap T) \cup \{j\})$. Ce qui entraîne, $B \cap C \in E_j(S \cup T)$ ou $B \cup C \in E(S \cap T)$. D'où la convexité de E_j.

Montrons que E_j admet une structure de déséquilibre $(S'_{k_1}, \ldots, S'_{k_\rho}, B_{k_1}, \ldots, B_{k_\rho})$.

Posons

$$\Delta = \{k \mid S_k = \{j\}\} \text{ et } \{k_1, \ldots, k_\rho\} = \{k \mid S_k \neq \{j\}\}$$

Pour $s = 1 \ldots \rho$, posons

$$S'_{k_s} = S_{k_s} \setminus \{j\}$$

Alors

$$\forall s = 1 \ldots \rho : S'_{k_s} \neq \emptyset \text{ et } S'_{k_1} \cup \cdots \cup S'_{k_\rho} = N \setminus \{j\}$$

Ainsi, pour $i_2 \neq i_2 \in N \setminus \{j\}$ tels que

$$\{k_s \mid S'_{k_s} \ni i_1\} \subset \{k_s \mid S'_{k_s} \ni i_2\}$$

Alors, $\left\{k_s \mid S'_{k_s} \ni i_1\right\} \cup \Delta \subset \left\{k_s \mid S'_{k_s} \ni i_2\right\} \cup \Delta$. Donc, $H^{i_1} \subset H^{i_2}$. Comme $(S_1, \ldots, S_r)$ satisfait (P), alors $H^{i_1} = H^{i_2}$. Donc, $H^{i_1} \setminus \Delta = H^{i_2} \setminus \Delta$. Ce qui entraîne

$$\{k_s \mid S'_{k_s} \ni i_1\} = \{k_s \mid S'_{k_s} \ni i_2\}$$

Ce qui montre que $(S'_{k_1}, \ldots, S'_{k\rho})$ satisfait (P).

En outre,

$$\bigcap_{i \in N \setminus \{j\}} \bigcup_{k_s \mid S'_{k_s} \ni i} B_{k_s} \subset \bigcap_{i \in N \setminus \{j\}} \bigcup_{k_s \mid S_{k_s} \ni i} B_{k_s} = \emptyset$$

Donc, pour que $(S'_{k_1}, \ldots, S'_{k\rho}, B_{k_1}, \ldots, B_{k_\rho})$ soit une structure de déséquilibre sur E_j, il nous reste à montrer que $B_{k_s} \in E(S'_{k_s})$ $(s = 1 \ldots \rho)$. En effet, si $j \in S_{k_s}$, alors $B_{k_s} \in E(S'_{k_s} \cup \{j\})$, donc $B_{k_s} \in E(S'_{k_s})$. Si $j \notin S_{k_s}$, i.e. $S'_{k_s} = S_{k_s}$, alors de la monotonie de E, $B_{k_s} \in E(S'_{k_s} \cup \{j\})$. Donc, $B_{k_s} \in E_j(S'_{k_s})$. En tout

$$\forall s = 1 \ldots \rho : B_{k_s} \in E(S'_{k_s})$$

En conclusion : E convexe, maximale et admet une structure de déséquilibre entraîne E_j convexe, maximale et admet une structure de déséquilibre. Cette implication montre que l'on peut avoir une suite $j_1, \ldots, j_q$ telle que les fonctions d'effectivité

$$E_{j_1}, \ldots, E_{j_q}$$

soient convexes, maximales et admet une structure de déséquilibre et E_{j_q} soit à trois joueurs. Des propositions 3.2 et 3.4, la fonction d'effectivité E_{j_q} admet un cycle d'ordre $\rho \leq 3$, donc instable. D'où une contradiction.

□

3.5 Conclusion

La connaissance des intentions des joueurs via leurs intégrations dans plusieurs coalitions permet de maîtriser les éventuels conflits dans une organisation. Les théorèmes d'équivalence de ce travail suggèrent par exemple que s'il y a une coalition à laquelle tous les joueurs font référence à toute intention de blocage d'alternatives, l'organisation est stable. La non-équivalence de l'équilibre à la stabilité nous a incité à proposer une nouvelle forme de répartition des pouvoirs au travers des coalitions. Les questions sont dès lors les suivantes : la structure de balancement peut-elle avoir un sens pour les jeux à utilités transférables et les jeux à utilités non-transférables ? Sera-t-elle nécessaire pour les jeux à utilités non transférables où le Scarf balancement n'est pas nécessaire ?

4 Les ensembles du marchandage en fonction d'effectivité

Nous définissons les ensembles du marchandage au sens de Mas-Colell et de Zhou dans les fonctions d'effectivité. Une fonction d'effectivité est marchandage stable si son ensemble de marchandage est non vide pour tout profil de préférences. Après quelques discussions sur les interprétations de ces nouvelles formes de stabilité, nous discutons de quelques propriétés des marchandages stabilités, mais ce travail a pour objet d'identifier les classes de fonctions d'effectivité pour lesquelles les stabilités au sens du marchandage et la stabilité au sens du coeur sont équivalentes.

Mots-clés : Ensembles du marchandage, marchandage stabilité, coeur stabilité, fonction d'effectivité, jeu NTU associé à une fonction d'effectivité.

JEL Classification : C71, C79.

AMS classification : 91A12

4.1 Introduction

La question de stabilité, synonyme de l'équilibre, reste le problème central de la théorie des jeux. Dans la théorie des jeux coopératifs, les éléments stables sont une solution d'un problème de distribution de valeurs, ou le résultant des jeux de force et d'influence qui régit la société. En dehors de l'idée d'équilibre, la notion de stabilité permet également de définir un mécanisme de sélection de l'issue du jeu et de concrétiser la forme de la rationalité sociale. Par exemple, la rationalité collective peut s'exprimer par : ce qui a été opposé par un joueur ou par une coalition ne doit pas être l'issue du jeu. Dans ce cas, l'organisation ne sera stable que si elle possède une alternative non opposable. Cette exigence, connue sous le nom de coeur, conduit généralement à la vacuité de l'ensemble de solution. Une autre version, tout en restant dans la forme de la rationalité du coeur, consiste à ne donner aucune importance aux objections discutables ou contestables. Cette version qui porte le nom d'ensemble du marchandage a été définie pour la première fois par Aumann R. & Maschler M.(12). Ces auteurs ont conçu l'objection comme une menace d' un joueur contre un autre, et la contre-objection est une réponse de celui qui se sent visé contre l'offenseur. En 1989, Mass-Colell (28) propose une version plus impersonnelle qui ne repose que sur les intérêts des joueurs : personne n'est contre personne ; chacun agit pour défendre ses intérêts. Sous un contexte particulier, si le jeu est joué selon le marchandage de Mass-Colell, alors sa solution correspondra à l'équilibre de Walras (28). Malgré ce résultat agréable, en 1989, Bhaskar Dutta & Debraj Ray (19) ont constaté une manque de consistance dans la définition de Mas-Colell : une coalition en train de faire une objection peut avoir une contestation venant de l'intérieur. En supprimant cette anomalie par une chaîne d'objections, ces deux auteurs arrivent à une nouvelle forme de marchandage : le marchandage consistant (19). En 1994, Lin Zhou (66) a proposé une autre solution pour résoudre l'anomalie de non-consistance de la définition de Mas-Colell : ne pas accepter les contestations des groupes sans aucune intersection avec la coalition de l'objection. Ainsi, Lin Zhou obtient une définition complète (pas besoin d'ajouter la condition de Pareto comme chez Mas-Colell) de l'ensemble du marchandage.

Plusieurs définitions de la contre-objection sont possibles, mais celles de Mas-Colell et de Zhou peuvent nous servir de base pour discuter toutes les possibilités. Pour les définitions dans le cas des jeux coopératifs, on peut voir les propriétés de ces ensembles dans (37), (38), (64) etc. et pour des comparaisons entre ces deux versions, on peut citer (11), (22).

Jusqu'à présent, le marchandage n'a été discuté que pour les jeux coopératifs : jeux à utilités transférables et à utilités non transférables. Le jeu coalitionnel ou les fonctions d'effectivité restent à l'écart du débat. En terme de vote, qui donne lieu à un cas particulier de fonction d'effectivité simple, le seul travail qui traite du problème de marchandage est celui de Peter Südholter & Bezalel Peleg (41). Pourtant, après avoir défini les fonctions d'effectivité associées aux votes à majorité simple, ils se sont contentés de résoudre le problème de marchandage du jeu à utilités non transférables associé à la fonction d'effectivité. Cette réduction affaiblit leurs résultats en matière de choix social car la non vacuité des ensembles du marchandage du jeu à utilités non transférables associé n'assure pas l'existence d'une issue sociale stable au sens du marchandage en fonction d'effectivité : il est possible que les ensembles du marchandage du jeu coopératif associé ne soient pas vide alors que l'organisation souffre du problème de conflit, sans issue sociale négociable.

Ainsi, nous proposons dans ce travail les définitions de la contre-objection selon Mas-Colell et selon Zhou en fonction d'effectivité. Ce travail a trois parties. Après un préliminaire qui discute des définitions des contre-objections dans les jeux coopératifs, nous définissons l'ensemble du marchandage au sens de Mas-Colell et au sens de Zhou en fonction d'effectivité. Dans la deuxième partie, nous comparons ces deux ensembles et étudions leurs propriétés. En troisième partie, nous proposons des classes de fonction d'effectivité où la stabilité au sens des marchandages et la stabilité au sens du coeur sont équivalentes.

4.2 Notations et définitions

L'ensemble des joueurs est représenté par un ensemble fini $N = \{1, \ldots, n\}$ et l'ensemble des alternatives par un ensemble fini $A = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Une coalition est un sous ensemble S de N. Si $Y \subset X$, alors $Y^c = X \setminus Y$. Notons $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties d'un ensemble X et $\mathcal{P}_0(X) = \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$. Une *fonction d'effectivité* est une fonction $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ telle que $E(\emptyset) = \emptyset$, $B \in E(N)$, $\forall B \in \mathcal{P}_0(A)$ et $A \in E(S)$, $\forall S \in \mathcal{P}_0(N)$; E est dite monotone si $\forall B, C \in \mathcal{P}_0(A), \forall S, T \in \mathcal{P}_0(N)$ tels que $B \in E(S)$, alors $C \supset B$ et $T \supset S$ entraîne $C \in E(T)$. La fonction E est maximale si $\forall B \in \mathcal{P}_0(A)$, $\forall S \in \mathcal{P}_0(N)$, $B \notin E(S)$ entraîne $B^c \in E(S^c)$. La fonction E est anonyme si $\forall S, T \in \mathcal{P}_0(N)$ tel que $|S| = |T|$, alors $E(S) = E(T)$. La fonction E est neutre si $\forall S \in \mathcal{P}_0(N)$, $\forall B$, $C \in \mathcal{P}_0(A)$ tel que $|B| = |C|$, alors $B \in E(S)$ si et seulement si $C \in E(S)$. La fonction E est simple si $\forall S \in \mathcal{P}_0(N)$, $E(S) = \mathcal{P}_0(A)$ ou $E(S) = \{A\}$.

On note $\mathcal{L}(A)$ l'ensemble des relations d'ordre linéaires sur A. Un $S-$profil, $S \in \mathcal{P}_0(N)$, est un élément de $\mathcal{L}(A)^S$. Pour $i \in N$, $S = \{i_0, \ldots, i_s\} \in \mathcal{P}_0(N)$ et $B \in \mathcal{P}_0(A)$, notons

$$u^i(B) = \min_{x \in B} u^i(x) \text{ et } u^S(B) = \Big(u^{i_0}(B), \ldots, u^{i_s}(B)\Big)$$

et pour $u \in \mathcal{L}(A)^N, S \in \mathcal{P}_0(N)$, $B, C \in \mathcal{P}_0(A)$, nous notons

$$u^S(B) > u^S(C) \Leftrightarrow u^S(x) > u^S(y), \forall x \in B, y \in C,$$

$$E^\star(S, u^N) = \Big\{B \in E(S) \mid \nexists B' \in E(S) \text{ tel que } u^S(B') > u^S(B)\Big\}.$$

4.3 Les ensembles du marchandage

Une *objection* contre une alternative $x \in A$ dans un profil $u^N \in \mathcal{L}(A)^N$ est une paire (S, B) satisfaisant

$$B \in E(S) \text{ et } \forall y \in B, \forall i \in S \ : u^i(y) > u^i(x)$$

Définition 4.1 (Mas-Colell,1989) *Une contre-objection contre (S, B) est une paire (T, C) telle que*

$$C \in E(T) \text{ et } u^T(C) > (u^{T \setminus S}(x), u^{T \cap S}(B))$$

Une objection sans contre-objection est dite justifiée au sens de Mas-Colell.

Définition 4.2 (Zhou, 1994) *Une contre-objection contre (S, B) est une paire (T, C) telle que*

$$C \in E(T), \quad S \setminus T, S \cap T, T \setminus S \neq \emptyset \text{ et } u^T(B) > (u^{T \setminus S}(x), u^{T \cap S}(B))$$

Une objection sans contre-objection est dite justifiée au sens de Zhou.

La définition originale de Zhou est définie par $u^T(C) \geq (u^{T \setminus S}(x), u^{T \cap S}(B))$. Comme $u^N \in \mathcal{L}(A)^N$, $S \cap T \neq \emptyset$ et $u^i(C) \geq u^i(B) > u^i(x)$, $\forall i \in S \cap T$, alors $x \notin C$. Donc, $u^{T \setminus S}(C) \geq u^{T \setminus S}(x) \Leftrightarrow u^{T \setminus S}(C) > u^{T \setminus S}(x)$

Pour mettre en évidence la différence entre ces deux définitions, prenons quelques exemples.

Exemple 4.1 Paretienneté *Soient $N = \{1,2,3\}$, $A = \{a,b,c,d\}$ et $E(\{1,2\}) = \{c,d\}^+$, $E(\{3\}) = \{a\}^+$, $E(N) = \mathcal{P}_0(A)$ et si S ne contient ni $\{1,2\}$ ni $\{3\}$ alors $E(S) = \{A\}$.*

Soit u^N le profil défini dans le tableau suivant :

d	d	a
c	c	b
a	a	d
b	b	c
u^1	u^2	u^3

Nous avons :

$$\mathcal{C}(E, u^N) = \emptyset,$$

et $\forall i \in N, \ u^i(a) > u^i(b)$. C'est-à-dire que b est Pareto dominé.

Mas-Colell : la contre-objection peut défendre une alternative Pareto dominée. L'alternative b est Pareto dominée. Pourtant, toutes les objections contre b admet une Mas-Colell contre-objection. En effet, supposons que $(N, \{a\})$ soit l'objection contre b, alors, la coalition $\{1,2\}$ peut dis-crédibiliser cette action car $\{c,d\} \in E(\{1,2\})$ et ces deux joueurs préfèrent les alternatives de $\{c,d\}$ à $\{a\}$. Donc, l'opposition $(N, \{a\})$ est neutralisée. Si $(\{1,2\}, \{c,d\})$ est une objection contre b, alors la paire $(\{3\}, \{a\})$ est une contre-objection, et si $(\{3\}, \{a\})$ est une opposition contre a, la paire $(\{1,2\}, \{c,d\})$ est une contre-objection.

Zhou : l'opposition à l'unanimité n'est pas discutable. En effet, les sous ensembles propres de N n'ont pas le droit d'opposer à l'objection faite par N.

On observe à partir de cet exemple que la négociation selon Mas-Colell doit se faire en deux temps : éliminer les alternatives non Pareto puis lancer la procédure de l'objection contre-objection. Par contre, la définition de Zhou supprime automatiquement les alternatives non Pareto.

Exemple 4.2 *Soient* $N = \{1,2,3,4,5\}$, $A = \{a,b,c,d\}$ *et soit* E *la fonction d'effectivité définie par :* $E(\{1,3\}) = \{a\}^+$, $E(\{1,4\}) = \{a,b\}^+$, $E(\{3,5\}) = \{b\}^+$, $E(\{4,5\}) = \{a,b,d\}^+$, $E(\{2\}) = \{a\}^+$ *; et pour* $S \supset S_k$, $E(S) = E(S_k), =1\ldots5$.

Soit u^N le profil montré dans le tableau suivant :

b	a	b	d	b
d	b	c	b	d
a	d	a	a	c
c	c	d	c	a
u^1	u^2	u^3	u^4	u^5

Zhou : une objection qui n'obtient pas l'adhésion totale de ses membres peut être crédible. Considérons l'objection $(\{1,2,3,5\},\{b\})$ contre d. L'alternative b est au top sauf pour 2, qui préfère a à b et qui a le pouvoir de forcer a. Mais, la condition de Zhou entraîne que le joueur 2 n'a pas le droit de contester $(\{1,2,3,5\},\{b\})$, *comme si* il était tenu par son accord avec $\{1,3,5\}$.

Zhou : une objection améliorable peut être crédible. Considérons l'objection $(\{1,4\},\{a,b,d\})$ contre c. Cette objection est nettement améliorable en terme de précision et en terme de préférence en proposant $(\{1,4,5\},\{b,d\})$. Toutefois, la condition imposée par Zhou interdit la contre-objection $(\{1,4,5\},\{b,d\})$.

Le marchandage est dans l'objectif de récupérer les alternatives négociables rejetées par le coeur. L'exemple suivant montre que les contre-objections des marchandages selon Mas-Colell et Zhou n'apportent rien de nouveau par rapport au coeur dans un profil où le contraste entre les préférences des joueurs est élevé.

Exemple 4.3 [Moulin, (31)] *Soient* $N = \{1,\ldots,5\}$, $A = \{a,b,c,d,e\}$ *et* $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ *la fonction d'effectivité définie par* $B \in E(S) \Leftrightarrow |B| \geq \lceil \frac{m}{n} s \rceil$ *telle que E soit anonyme, i.e.* $|T| = |S|$*, alors* $E(T) = E(S)$*, et neutre i.e.* $|T| = |S|$*, alors* $B \in E(S)$ *si et seulement si* $C \in E(S)$*.*

Soit u^N le profil défini par :

a	e	d	c
b	a	e	d
c	b	a	e
d	c	b	a
e	d	c	b
$u^{1,5}$	u^2	u^3	u^4

Nous avons :

$$\mathcal{C}(E, R^N) = \{a\}$$

- *Marchandage sur* b : $\forall S \in \{S \mid \{4\} \subset S \subset N\}$, $\exists B \in E(S)$ tel que (S,B) soit une objection contre b. Inversement, toutes les objections contre b sont de la forme (S,B), $S \ni 4$. Comme $(N,\{a\})$ est une objection contre b, alors l'exclusion de b n'est pas discutable selon Zhou. Pour Mas-Colell, les coalitions $S \in \{S \mid S \ni 4\}$ peuvent en discuter mais la condition de

la rationalité ou de la cohérence des préférences ne permettent pas de réaliser ces objections.
- *Marchandage sur c* : Les objections contre c sont $(S, \{a,b\})$ où $S \in \{S \mid S \subset \{1,2,3,5\}, |S| = 3\}$, $(\{1,2,3,5\}, \{a\})$, $(\{2,3\}, \{a,b,e\})$ et $(\{3\}, \{a,b,d,e\})$. La seule discussion dans le marchandage de Zhou se passe entre $\{1,3,5\}$ et $\{2,3\}$, qui se neutralisent mutuellement. Quant au marchandage de Mas-Colell, il y a plusieurs coalitions qui peuvent participer à la négociation, notamment un débat entre $\{3\}$ et $\{1,2,5\}$. Toutefois, dans les deux versions, l'objection $(\{1,2,3,5\}, a)$ est justifiée contre c.
- *Marchandage sur d et e :* Comme précédemment, ces deux alternatives ont des objections crédibles, que ce soit selon Zhou ou selon Mas-Colell.

En conclusion, la seule solution de ces marchandages est $\{a\}$.

Dans ce qui suit, nous n'étudions que le marchandage selon Mas-Colell sauf si le résultat n'est valide que pour le marchandage au sens de Zhou.

4.3.1 La non vacuité des ensembles du marchandage

Pour $R^N \in \mathcal{L}(A)^N$, nous associons u^N qui représente les fonctions d'utilité associées aux préférences $R^1, \ldots R^n$. Le coeur d'une fonction d'effectivité E dans $u^N \in \mathcal{L}(A)^N$ est

$$\mathcal{C}(E, u^N) = \{x \in A \mid \nexists\ (S, B) \text{ tel que } (S, B) \text{ soit une objection contre } x\}$$

Notons

$$\mathcal{I}(E, u^N) = \left\{x \in A \mid \nexists y \in A, u^N(y) > u^N(x)\right\},$$

l'ensemble des alternatives non Pareto dominées.

Définition 4.3 *L'* ensemble du marchandage au sens de Mas-Colell *de E dans $u^N \in \mathcal{L}(A)^N$ est donné par*

$$\mathcal{B}_m(E, u^N) = \mathcal{I}(E, u^N) \cap \{x \in A \mid x \text{ n'admet aucune objection justifiée selon Mas-Colell }\}$$

Définition 4.4 *L'* ensemble du marchandage au sens de Zhou *de E dans un profil u^N est donné par*

$$\mathcal{B}_z(E, u^N) = \{x \in A \mid x \text{ n'admet aucune objection justifiée au sens de Zhou}\}$$

Le marchandage en fonction d'effectivité cherche une solution parmi les alternatives proposées. Toutefois, le mécanisme de marchandage peut être perçu comme une procédure de fabrication d'états sociaux, en dehors des alternatives initialement discutées, dans lesquels les joueurs peuvent s'entendre. Selon la procédure de la non-objection, un état social $x \in \mathbb{R}^n$ est réalisable s'il existe $a \in A$ tel que $x \leq u^N(a)$. Dans ce cas, la distribution des pouvoirs aux coalitions est définie par :

$$V_{E,u^N}(S) = \left\{x \in \mathbb{R}^S_+ \mid \exists B \in E(S), u^S(B) \geq x\right\}$$

la fonction $S \mapsto V_{N,u^N}(S)$ correspond au jeu à utilités non transférables associés à la fonction d'effectivité E dans le profil u^N. Remarquons que la classe des jeux associés à une fonction d'effectivité ne représente qu'une petite partie des jeux à utilités transférables. Par exemple pour $N = \{1,2,3\}$, alors $\forall i \in N$, $V(E,u^N)(\{1\})$ est un segment, et $\forall S \in N, |S| = 2$, $V_{E,u^N}(S)$ est un pavé de $\mathbb{R}^2$. Cette inclusion entraîne que pour tout $E : \mathcal{P}_0(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$, la stabilité de V_{E,u^N} exige moins de conditions que la stabilité d'un jeu NTU quelconque. Il va de soi l'importance de la connaissance des relations entre la stabilité de E et la stabilité de $V(E,u^N)$

Rappel. *Une objection contre* $x \in \partial V(E,u^N)$ [1] *est une paire* (S,y), $y_S \in \partial V_{E,R^N}(S)$ *telle que* $y_S \gg x_S$ [2]. *Une contreobjection selon Mas-Colell contre* (S,y) *est une paire* (T,z) *tel que*

$$z \in V_{E,R^N}(T) \text{ et } z_T > (y_{T\cap S}, x_{T\setminus S})$$

L'ensemble du marchandage à la Mas-Colell de V_{E,u^N} est défini par :

$$\mathcal{B}_m(V_{E,u^N}) = \{x \in \partial V_{E,u^N}(N) \mid \text{toute objection contre } x \text{ a au moins une m.c.o.}\}$$

Premièrement, nous avons :

Proposition 4.1 (Peleg, (1983)) *Soit* $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ *une fonction d'effectivité et* $u^N \in \mathcal{L}(A)^N$. *Alors :*

$$\mathcal{C}(V_{E,R^N}) \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{C}(E,R^N) \neq \emptyset$$

Cette implication montre que le coeur d'une fonction d'effectivité ne diffère pas du coeur du jeu NTU associé. Pour chaque x dans le coeur du jeu NTU associé, il existe un état social $a \in A$ tel que $x = u^N(a)$. Cette implication permet en outre de trouver des conditions du coeur-stabilité d'une fonction d'effectivité. Par exemple, pour montrer qu'une fonction d'effectivité convexe est stable, B. Peleg a démontré (5) qu'une fonction d'effectivité est convexe si et seulement si le jeu NTU associé est convexe. De même, pour montrer qu'une fonction d'effectivité équilibrée est convexe, Kolpin(27) a montré qu'une fonction d'effectivité est équilibrée si et seulement si le jeu NTU associé est équilibré.

Quant à la solution du marchandage, nous avons l'inclusion suivante :

Proposition 4.2 *Pour tout profil* $u^N \in \mathcal{L}(A)^N$, *nous avons*

$$\mathcal{B}_m(E,u^N) = \left\{a \in A | u^N(a) \in \mathcal{B}_m(V_{E,R^N})\right\}$$

Preuve : $\Rightarrow$. Soit $a \in \mathcal{B}_m(E,u^N)$ et montrons que $x = u^N(a) \in \mathcal{B}(V_{E,u^N})$. Soit (S,y) une objection contre x. Donc, $y_S \in V_{E,u^N}(S)$ et $y_S > x_S$. Par définition de V_{E,u^N}, il existe $B \in E(S)$ tel que $u^S(B) \geq y_S > x_S = u^S(a)$. Par conséquent, (S,B) est une objection contre $a \in A$. Comme $a \in \mathcal{B}_m(E,u^N)$, alors il existe $(T,C), C \in E^\star(T,u^N)$, une Mas-Colell contre-objection contre (S,B). Posons $z_T = u^T(C)$. Donc, $z_T \in \partial V_{E,u^N}(S)$ et $z_T > (y_{T\cap S}, x_{T\setminus S})$. C'est-à-dire que (T,z) est une contre-objection à (S,y).

$\Leftarrow$. Soit $x \in \mathcal{B}_m(V_{E,u^N})$ tel qu'il existe $a \in A$ satisfaisant $x = u^N(a)$. Montrons que $a \in \mathcal{B}_m(E,u^N)$.

1. Pour une sous ensemble Y d'un espace topologique (X,τ), $\overline{Y}$ désigne la fermeture de Y dans (X,τ) et $\partial Y = \overline{Y} \setminus Y$,

2. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, x_S désigne la projection de x sur $\mathbb{R}^{|S|}$.

Soit (S,B) une objection contre a telle que pour aucun $B' \in E(S)$ nous avons $u^S(B') > u^S(B)$. Alors, $y_S = u^S(B) \in \partial V_{E,u^N}(S)$ et $y_S = u^S(B) > u^S(a) = x_S$. D'où (S,y) est une objection contre x. Comme $x \in \mathcal{B}_m(V_{E,u^N})$, alors il existe (T,z), $z_T \in \partial V_{E,n^N})$ tel que $z_T > (y_{T\cap S}, x_{T\setminus S}) \geq (u^{T\cap S}(B), u^{T\setminus S}(a))$. Puisque $z_T \in V_{E,u^N}(T)$, alors il existe $C \in E(T)$ tel que $u^T(C) \geq z_T$. Par suite, $u^T(C) > (u^{T\cap S}(B), u^{T\setminus S}(a))$.

□

Cette proposition 4.2 donne l'inclusion :

$$\forall u^N \in \mathcal{L}(A)^N, \;\; u^N(\mathcal{B}_m(E,u^N)) \subset \mathcal{B}_m(V,u^N)$$

qui est une inclusion stricte. En effet, dans Peleg & Sudhölter (38), $|A| \leq 5$ entraîne $\mathcal{B}_m(V_{E_q,u^N}) \neq \emptyset, \forall u^N \in \mathcal{L}(A)^N$ (38). Donc, en particulier, le jeu NTU de l'exemple ci-dessous est marchandage stable au sens de Mas-Colell. C'est à dire qu'il existe une solution x du marchandage du jeu NTU associé sans qu'il y ait un état social $a \in A$ du marchandage en effectivité tel que $x = u^N(a)$.

Exemple 4.4 [Peleg et Sudhölter, (41)]*Soient $n = 3$, $A = \{a,b,c\}$ et E la fonction d'effectivité définie par : $E(S) = \mathcal{P}_0(A) \Leftrightarrow |S| \geq 2$*

Soit et $u \in \mathcal{L}(A)^N$ le profil défini comme suit :

a	c	b
b	a	c
c	b	a
u^1	u^2	u^3

Nous avons $\mathcal{B}_m(E,u^N) = \emptyset$ alors que $\forall u^N \in \mathcal{L}(A)^N$, $\mathcal{B}_m(V_{E,u^N}) \neq \emptyset$. En particulier,

$$\mathcal{B}_m(V_{E,u^N}) = \Big\{(u^1(b), u^1(a), 0), (0, u^1(a), u^1(c)), (u^1(b), 0, u^1(c))\Big\}$$

Donc, pour tout $x \in \mathcal{B}_m(V_{E,u^N})$, il n'existe pas $a \in A$ tel que $x = u^N(a)$.

Nous terminons ce paragraphe par l'exemple suivant qui montre qu'une alternative moyennement préférée par tous les joueurs est naturellement dans le marchandage.

Exemple 4.5 [Peleg et Sudhölter, (38)] *Soient $N = \{1,\ldots,n\}$, $A = \{x_1,\ldots,x_m\}$ et $E_{\frac{n}{2}}$ l'effectivité définie par : $\forall S$, $|S| \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$; $E_{\frac{n}{2}}(S) = \mathcal{P}_0(A)$ et $\forall S$, $|S| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $E_{\frac{n}{2}}(S) = \{A\}$. Notons $\mathcal{W}_{\frac{9}{2}} = \Big\{S \mid E_{\frac{9}{2}}(S) = \mathcal{P}_0(A)\Big\}$.*

Prenons $N = \{1,\ldots,9\}$, $A = \{a,b,c,d\}$ et $E = E_{\frac{9}{2}}$. Soit $u^N \in \mathcal{L}(A)^N$ le profil défini dans le tableau suivant :

a	a	b	b	c	c	a	c	b
b	c	a	c	a	b	b	a	c
d	d	d	d	d	d	d	d	d
c	b	c	a	b	a	c	b	a
u^1	u^2	u^3	u^4	u^5	u^6	u^7	u^8	u^9

- *Les objections contre a* : Nous avons $\{i \mid u^i(c) > u^i(a)\} = \{4,5,6,8,9\} \in \mathcal{W}_{\frac{9}{2}}$, $\{i \mid u^i(b) > u^i(a)\} = \{3,4,6,9\} \notin \mathcal{W}_{\frac{9}{2}}$ et $\{i \mid u^i(d) > u^i(a)\} = \{4,6,9\} \notin \mathcal{W}_{\frac{9}{2}}$. Alors, $(\{4,5,6,8,9\},\{c\})$ est la seule objection contre a. Or, une contre-objection est une objection, donc, une objection unique est justifiée. Par conséquent, $a \notin \mathcal{B}_m(E,u^N)$.

- *Les objections contre b* : Nous avons $\{i \mid u^i(a) > u^i(b)\} = \{1,2,5,7,8\} \in \mathcal{W}_{\frac{9}{2}}$, $\{i \mid u^i(c) > u^i(b)\} = \{2,5,6,7\} \notin \mathcal{W}_{\frac{9}{2}}$ et $\{i \mid u^i(d) > u^i(b)\} = \{2,5,8\} \notin \mathcal{W}_{\frac{9}{2}}$. Alors, $(\{1,2,5,7,8\},\{a\})$ est la seule objection contre b. Par conséquent, $b \notin \mathcal{B}_m(E,u^N)$.

- *Les objections contre c*. Nous avons : $\{i \mid u^i(a) > u^i(c)\} = \{1,2,3,7\} \notin \mathcal{W}_{\frac{9}{2}}$, $\{i \mid u^i(b) > u^i(c)\} = \{1,3,4,7,9\} \in \mathcal{W}_{\frac{9}{2}}$, $\{i \mid u^i(d) > u^i(c)\} = \{1,3,7\} \notin \mathcal{W}_{\frac{9}{2}}$. Donc, $(\{1,3,4,7,9\},\{b\})$ est la seule objection contre c. Par conséquent, $c \notin \mathcal{B}_m(E,u^N)$.

- *Les objections contre d*. Nous avons : $\{i \mid u^i(a) > u^i(d)\} = \{1,2,3,5,7,8\}$ $=S_1$, $\{i \mid u^i(b) > u^i(d)\} = \{1,3,4,6,7,9\}$ $=S_2$, $\{i \mid u^i(c) > u^i(d)\}$ $= \{2,4,5,6,8,9\} = S_3$. En tout, il y a 21 objections contre d.
Pour tout $k = 1\ldots 3 \mod 3$, $S \subset S_k$ tel que $|S| \geq 5$, (S_k, x_k) où $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$, est une objection contre d. Si S, T sont les objections et contre-objections telles que $S \cap T \neq \emptyset$, alors $S \cap T \subset \{i \mid u^i(a) > u^i(d)\} \cap \{i \mid u^i(b) > u^i(d)\} = \{1,7\}$. Dans ce cas, a est une top-alternative pour $i \in S \cap T$, ce qui donne $\{i \mid u^i(a) > u^i(d)\}$ peut faire une contre-objection à l'objection $(\{i \mid u^i(b) > u^i(d)\},\{b\})$ mais $\{i \mid u^i(b) > u^i(d)\}$ ne peut pas faire l'inverse. Ici, les solutions selon Mas-Colell et Zhou sont identiques, après avoir supprimé les contre-objections faites par les sous et les sur ensembles. En outre, toutes les objections contre d admet au moins une contre-objection. Par exemple, $\{i \mid u^i(a) > u^i(d)\} = \{1,2,3,5,7,8\}$ est neutralisé par $(\{4,5,6,8,9\},\{c\})$. Alors :

$$\mathcal{B}_m(E,u^N) = \{d\} \quad \text{et donc } u^N(d) \in \mathcal{B}_m(V_{E,u^N})$$

Remarquons que l'alternative d est presque la pire alternative de tous les joueurs, mais elle est la seule qui répond à l'attente du marchandage. Ici, si la décision a été prise avec la règle de la pluralité, d ne sera jamais une solution dans ce profil. De même, si la décision a été prise selon la règle de Borda où les scores de Borda sont $B(a,u^N) = B(b,u^N) = B(c,u^N) = 3$ et $B(d,u^N) = -7$, alors d ne sera jamais sélectionnée.

Avant d'entrer dans le coeur du problème, nous tenons à remarquer que les marchandages stabilités et le coeur stabilité ne sont visiblement différents que si l'on considère les fonctions d'effectivité non-monotones. La non-invariance des marchandages stabilités par passage à la couverture monotone joue donc un rôle crucial pour la différenciation de ces deux notions. En effet,

Propriété. *Le marchandage n'est pas invariant par passage à la couverture monotone.*

Notons $\prec$ la relation entre fonctions d'effectivité définie par : pour $E, F : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$, $E \prec F$ si et seulement si $\forall S \in \mathcal{P}(N);\ E(S) \subset F(S)$.

La *couverture monotone* d'une fonction d'effectivité $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ est la fonction d'effectivité E^m telle que pour toute fonction d'effectivité monotone $F : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ telle que $E \prec F$, alors $E^m \prec F$.

Proposition 4.3 (Peleg) *Soit $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité. Alors,*

$$\mathcal{C}(E, u^N) \neq \emptyset, \forall u^N \in \mathcal{L}(A)^N \Rightarrow \mathcal{C}(E^m, u^N) \neq \emptyset, \forall u^N \in \mathcal{L}(A)^N$$

La monotonie est une propriété naturelle d'une fonction d'effectivité dans le sens où l'intégration d'un nouveau membre dans une coalition ne nuit pas à son pouvoir. Donc, cette proposition exprime que la connaissance de la répartition de pouvoir aux coalitions essentielles : $E(S) \neq E(S \setminus \{i\}),\ \forall i \in S$, est suffisante pour déterminer la stabilité de E. Quand au marchandage, cette proposition n'est plus valide dans le sens où les objections supplémentaires modifieraient l'issue du jeu. En effet, considérons l'exemple suivant :

Exemple 4.6 *Soit $N = \{1, 2, 3\}$, $A = \{a, b, c\}$ et E la fonction d'effectivité définie par : pour tout $i, j \in N$, $E(\{i\}) = E(N) = \mathcal{P}_0(A)$ et $E(\{i, j\}) = \{A\}$.*

Alors pour tout profil u^N, $\mathcal{B}_m(E, u^N) \neq \emptyset$. Pourtant l'ensemble du marchandage de la couverture monotone E^m de E est vide dans le profil suivant :

$$\begin{array}{ccc} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \\ \hline u^1 & u^2 & u^3 \end{array}$$

4.4 Les marchandages stabilités et le coeur-stabilité

Une fonction d'effectivité E est *coeur stable* si et seulement si

$$\forall u^N \in \mathcal{L}(A)^N :\ \mathcal{C}(E, u^N) \neq \emptyset,$$

elle est dite *marchandage-stable au sens de Mas-Colell* si

$$\forall u \in \mathcal{L}(A)^N\ : \mathcal{B}_m(E, u^N) \neq \emptyset,$$

et *marchandage-stable au sens de Zhou* si

$$\forall u \in \mathcal{L}(A)^N\ : \mathcal{B}_z(E, u^N) \neq \emptyset.$$

On note $\mathcal{C}$, $\mathcal{B}_m$ et $\mathcal{B}_z$ l'ensemble des fonctions d'effectivité $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ coeur stable, marchandage stable au sens de Mas-Colell et marchandage stable au sens de Zhou respectivement.

Dans un profil donnée, la relation entre le coeur et les ensembles du marchandage est donnée par

Proposition 4.4 *Si $E : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(N))$ est une fonction d'effectivité. Alors, $\forall u^N \in \mathcal{L}(A)^N$ nous avons :*

$$\mathcal{C}(E, u^N) \subset \mathcal{B}_m(E, u^N) \cap \mathcal{B}_z(E, u^N)$$

Plus précisément,

Exemple 4.7 *Il existe une fonction d'effectivité monotone et un profil* $u^N \in \mathcal{L}(A)^N$ *tels que* $\mathcal{C}(E,u^N) \subsetneq \mathcal{B}_m(E,u^N) \cap \mathcal{B}_z(E,u^N)$.

Soient $N = \{1,2,3,4\}$, $A = \{x,y,z,t\}$ et E la fonction d'effectivité définie comme suit : Pour tout $S \in \{S \mid |S| \geq 2\} \setminus \{1,3\}$, $E(S) = \mathcal{P}_0(A)$, pour tout $|S| = 1$, $E(S) = \{B \subset A||B| \geq 3\}, E(\{3\}) = E(\{1,3\})$ $=\{B \mid |B| \geq 2\}$. Soit u^N le profil consigné dans le tableau suivant :

x	t	z	y
y	x	y	t
z	z	x	z
t	y	t	x
u^1	u^2	u^3	u^4

Alors
$$\mathcal{C}(E,u^N) = \emptyset, \mathcal{B}_z(E,R^N) = \{z\} \text{ et } \mathcal{B}_m(E,R^N) = \{z,t\}$$

Le coeur. Nous avons : $(\{1\},\{x,y,z\})$ est une objection à t, $(\{2\},\{t,x,z\})$ est une objection à y, $(\{4\},\{y,t,z\})$ est une objection à x et $(\{1,2\},\{x\})$ est une objection à z. Donc :

$$\mathcal{C}(E,u^N) = \emptyset$$

L'ensemble du marchandage selon Zhou. La paire $(\{2,4\},\{t\})$ est une objection justifiée contre x, $(\{1,2\},\{x\})$ est une objection justifiée contre y et la paire $(\{1,3,4\},\{y\})$ est une objection justifiée selon Zhou contre t. Par contre, les objections contre z sont $(\{1,2\},\{x\})$, $(\{1,4\},\{y\})$ et $(\{2,4\},\{t\})$. On peut vérifier que $z \in \mathcal{B}_z(E,u^N)$.

L'ensemble du marchandage selon Mas-Colell. Les objections contre t sont $(\{3\},\{y,z\})$, $(\{1,2\},\{x\})$ et $(\{1\},\{x,y,z\})$. La paire $(\{3\},\{y,z\})$ est la contre-objection à $(\{1,2\},\{x\})$, la paire $(\{1\},\{x,y,z\})$ est la contre-objection à $(\{3\},\{y,z\})$ et $(\{1,2\},\{x\})$ est la contre-objection à $(\{1\},\{x,y,z\})$. D'où
$$\mathcal{B}_m(E,R^N) = \{z,t\}$$

Entre les stabilités, nous avons l'inclusion suivante :

Proposition 4.5 *Il existe une fonction d'effectivité* $E : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(N))$ *telle que* $E \in \mathcal{B}_m \setminus \mathcal{C}$.

Preuve Soit $N = \{1,2,3\} \cup \{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$, $A = \{x_1,x_2,x_3\}$ et soit E la fonction d'effectivité définie comme suit :

$$\begin{cases} \forall k,\ p = 1,2,3 \mod 3,\ E\left(\{k,k+1,\alpha_p\}\right) = \{x_{k+2}\}^+ \\ \text{Dans les autres cas, } E(S) = \{A\}. \end{cases}$$

Nous allons démontrer que tout profil u^N, $\mathcal{B}_m(E,R^N) \neq \emptyset$ alors qu'il existe un profil u^N tel que $\mathcal{C}(E,u^N) = \emptyset$

- Profils dans lesquels le coeur de E est vide. Notons $A = \{x_k, x_s, x_{\bar{s}}\}$

Objections contre x_k. Les objections contre x_k sont de la forme $(\{k, s, \alpha_p\}, x_{\bar{s}})$ où $s \neq \bar{s}$ sont des éléments de $\{k-1, k+1\} = \{k+2, k+1\}$. Cette condition oblige les joueurs k et s pour choisir des préférences qui satisfont :

$$\begin{cases} u^k(x_{\bar{s}}) > u^k(x_k) \\ u^s(x_{\bar{s}}) > u^s(x_k) \end{cases} \tag{4.1}$$

Objections contre x_s. Les objections contre x_s sont de la forme $(\{s, l, \alpha_p\}, x_{\bar{l}})$ où $l \neq \bar{l}$ sont des éléments de $\{k, \bar{s}\}$. De là, distinguons deux cas :

Supposons que $l = k$. Alors, les préférences de k et de s satisfont :

$$\begin{cases} u^k(x_{\bar{s}}) > u^k(x_s) \\ u^s(x_{\bar{s}}) > u^s(x_s) \end{cases} \tag{4.2}$$

La combinaison de 4.1 et de 4.2 oblige les joueurs k et s à choisir $x_{\bar{s}}$ comme top alternative. Or, la définition de E oblige l'objection contre $x_{\bar{s}}$ à prendre au moins deux joueurs dans $\{1, 2, 3\}$, ce qui est impossible. Par conséquent :

$$k \neq l$$

Donc, les objections contre x_s sont de la forme $(\{s, \bar{s}, \alpha_p\}, x_k)$.

Objections contre $x_{\bar{s}}$. De ces deux premiers cas, les objections contre $x_{\bar{s}}$ sont de la forme $(\{\bar{s}, k, \alpha_p\}, x_s)$. Ainsi, $\mathcal{C}(E, u^N) = \emptyset$ entraîne que le profil de la coalition $\{1, 2, 3\}$, $u^{1,2,3}$ satisfait :

$$\begin{array}{ccccccc} x_3 & x_1 & x_2 & & x_2 & x_3 & x_1 \\ x_2 & x_3 & x_1 & \text{ou} & x_3 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & & x_1 & x_2 & x_3 \\ u^1 & u^2 & u^3 & & u^1 & u^2 & u^3 \end{array}$$

Montrons que pour tout $u^N \in \mathcal{L}(A)^N$ tel que $\mathcal{C}(E, u^N) = \emptyset$, alors $\mathcal{B}_m(E, u^N) \neq \emptyset$

- La non vacuité de $\mathcal{B}_m(E, u^N)$, $\forall u^N \in \mathcal{L}(A)^N$. Notons a_p le pire alternative du joueur α_p ($p = 1 \ldots 3$) et distinguons trois cas

Les a_p sont égaux à x_k, $k \in \{1, 2, 3\}$. Les objections contre x_k sont $(\{k, s, \alpha_1\}, x_{\bar{s}})$, $(\{k, s, \alpha_2\}, x_{\bar{s}})$ et $(\{k, s, \alpha_3\}, x_{\bar{s}})$. Il n'est pas difficile de voir que chacune des ces objections est une contre-objection contre les autres.

Deux des a_p sont égaux à x_k, $k \in \{1, 2, 3\}$. Les objections contre x_k sont $\left(\{k, s, \alpha_p\}, x_{\bar{s}}\right)$, $\left(\{k, s, \alpha_{\bar{p}}\}, x_{\bar{s}}\right)$, où $\bar{p} \neq p$ sont dans $\{1, 2, 3\}$. Comme auparavant, chacune des ces deux objections est une contre-objection contre l'autre.

Tous les a_p sont différents. Supposons que $a_1 = x_k$, $a_2 = x_s$ et $a_3 = x_{\bar{s}}$. Si $x_{\bar{s}}$ est sur la deuxième position pour 2, alors les objections contre x_s sont $(\{k, s, \alpha_1\}, x_{\bar{s}})$ et $(\{k, s, \alpha_2\}, x_{\bar{s}})$. Dans ce cas $x_s \in \mathcal{B}_m(E, u^N)$. Alors, $x_s \in \mathcal{B}(E, R^N) \cap \mathcal{B}_z(E, R^N)$ ou $x_{\bar{s}}$, même si x_s n'est pas dans le top pour α_3.

Ainsi, $\mathcal{C}(E, u^N) \neq \emptyset$ pour tout $u \in \mathcal{L}(A)^N$ tel que $\mathcal{C}(E, u^N) = \emptyset$.

□

Maintenant, nous allons définir un ensemble de profils qui nous est utile pour la preuve des résultats principaux de ce travail. En effet, pour chaque partition de $N \times A$, $(T_1, \ldots, T_r, C_1, \ldots, C_r)$ nous associons

$$\mathcal{U}(N, A) := \mathcal{U}(T_1, \ldots, T_r, C_1, \ldots, C_r, N, A) = \left\{ u \in \mathcal{L}(A)^N \mid u \text{ satisfait } 4.3 \right\},$$

où l'équation 4.3 est définie par : $\forall k, l = 1 \ldots r \mod r$,

$$\begin{cases} \forall i, j \in T_k & u^i = u^j; \\ \forall i \in T_k & u^i(c_l) > u^i(x),\ \forall x \in C_l; \\ \forall i \in T_k & u^i(C_{k+l}) > u^i(C_{k-1+l}) \end{cases} \tag{4.3}$$

La structure d'un $u \in \mathcal{U}(N, A)$ est montrée dans le tableau suivant :

$$\begin{array}{ccccc} C_{k-1} & \ldots & C_{k+\rho-1} & \ldots & C_{k-2} \\ & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & C_{k-1} & \vdots & C_{k+\rho-1} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \\ C_k & \ldots & C_{k+\rho} & & C_{k-1} \\ u^{T_k} & \ldots & u^{T_{k+\rho}} & \ldots & u^{T_{k-1}} \end{array}$$

Théorème 4.1 *Soit $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité monotone. Si E est stable au sens du marchandage de Zhou, alors E ne possède aucun cycle circulaire.*

Preuve : Par contraposition. Soient E une fonction d'effectivité circulaire, $(T_1, \ldots, T_r, C_1, \ldots, C_r)$ une partition de $N \times A$ et $c, 1 \leq c \leq r - 1$ tels que

$$\forall k = 1 \ldots r,\ C_k \cup \cdots \cup C_{k+c-1} \in E(T_{k+c} \cup \cdots \cup T_{k-1}),$$

et soit $u^N \in \mathcal{U}(N, A)$.

Montrons que $\mathcal{B}_z(E, u^N) = \emptyset$.

Soient $x \in A$ et $k \in \{1, \ldots, r\}$ ($\mod r$) tel que $x \in C_{k-1}$.

- *Premièrement, $x \neq c_{k-1}$.* Alors, $(N, \{c_{k-1}\})$ est une objection justifiée selon Zhou contre x, i.e. $x \notin \mathcal{B}_z(E, u^N)$.

- *Deuxièmement, montrons que* $\forall k = 1 \ldots r \mod r : c_{k-1} \notin \mathcal{B}_z(E, u^N)$.

Posons

$$\rho = \min \left\{ \beta | \bigcup_{l=k}^{k+\beta-1} C_l \in E\left(\bigcup_{l=k+\beta}^{k-1} T_l \right) \right\} \tag{4.4}$$

De la circularité de E, le nombre ρ existe et $1 \leq \rho \leq p - 1$. Par conséquent, si $B = C_k \cup \ldots \cup C_{k+\rho-1}$ et $S = T_{k+\rho} \cup \ldots \cup T_{k-1}$ alors la paire (S, B) est une objection Zhou - justifiée contre c_k.

En effet, si (T, C) est une contre-objection selon Zhou contre l'objection (S, B), nous avons $C \in E(T)$ et $u^T(C) \geq \left(u^{T \cap S}(B), u^{T \setminus S}(c_{k-1}) \right)$. Ce qui entraîne :

$$\forall i \in S \cap T,\ u^i(C) \geq u^i(B) \tag{4.5}$$

$$\forall i \in T \setminus S,\ u^i(C) > u^i(c_{k-1}) \tag{4.6}$$

Étant donné que $T \setminus S \subset T_k \cdots \cup T_{k+\rho-1}$, alors si $\theta \in [0, \ldots, \rho-1]$ désigne le premier indice satisfaisant $(T \setminus S) \cap T_{k+\theta} \neq \emptyset$, nous obtenons pour tout $i \in (T \setminus S) \cap T_{k+\theta}$

$$\begin{cases} u^i(C_{k-1}) & > \cdots > u^i(C_{k+\theta}) \\ u^i(C_{k+\theta-1}) & > \cdots > u^i(C_{k-1}) \end{cases}$$

Comme $S \cap T \neq \emptyset$ et $T \setminus S \neq \emptyset$, alors des équations 4.5 et 4.6, nous avons :

$$x \notin C \text{ et } C \subset C_{k-1} \cup \cdots \cup C_{k+\theta-1} \tag{4.7}$$

Comme pour tout $i \in N$ et pout tout $x \in C_{k-1}$, $u^i(x) < u^i(c_{k-1})$, alors l'équation 4.6 donne :

$$C \cap C_{k-1} = \emptyset \tag{4.8}$$

Sachant que θ est le premier indice satisfaisant $T \cap T_{k+\theta} \neq \emptyset$, alors le choix de S nous permet de conclure que

$$\begin{aligned} T \setminus S &\subset T_{k+\theta} \cup \ldots \cup T_{k+\rho-1} \\ T \cap S &\subset T_{k+\rho} \cup \ldots \cup T_{k-1} \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$T \subset T_{k+\theta} \cup \ldots \cup T_{k+\rho-1} \cup T_{k+\rho} \cup \ldots \cup T_{k-1}$$

Par conséquent, de l'équation 4.7 et de la monotonie de E,

$$\theta \in \left\{ \beta | \bigcup_{l=k}^{k+\beta-1} C_l \in E\left(\bigcup_{l=k+\beta}^{k-1} T_l \right) \right\}$$

Donc l'équation 4.8, $\theta < \rho$. D'où une contradiction avec la minimalité de ρ.

$\square$

Corollaire 4.1 *Pour chacune des classes de fonctions d'effectivité suivantes, le coeur stabilité est équivalent au marchandage stabilité à la Zhou.*
1 - Classe des fonctions d'effectivité monotones et simples ;
2 - Classe des fonctions d'effectivité monotones et maximales ;
3 - Classe des fonctions d'effectivité monotones anonymes et neutres.

Preuve : 1- Cf le théorème 4.1 de (50)
2 - Cf le théorème 4.2 de (50).
2 - Cf le théorème 4.4 de (50).

Théorème 4.2 *Soit $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité monotone et sur-additive. Si E est stable au sens du marchandage de Mas-Colell, alors E ne possède aucun cycle circulaire.*

Preuve : Par contraposition. Soit E une fonction d'effectivité sur-additive et circulaire, $(T_1, \ldots, T_r, C_1 \ldots, C_r)$ une partition de $N \times A$ et $c, 1 \leq c \leq r-1$ tels que

$$\forall k = 1 \ldots r,\ C_k \cup \cdots \cup C_{k+c-1} \in E(T_{k+c} \cup \cdots \cup T_{k-1}),$$

et soit $u^N \in \mathcal{U}(N, A)$.

Montrons que $\mathcal{B}_m(E, u^N) = \emptyset$.

Soient $x \in A$ et $k \in \{1, \ldots, r\}$ tel que $x \in C_{k-1}$. De la définition de $\mathcal{U}(N, A)$, nous avons :

$$\forall k = 1 \ldots r,\ \forall x \in C_k \setminus \{c_k\}\ :\ x \notin \mathcal{I}(E, u^N)$$

Montrons que $c_{k-1} \notin \mathcal{B}_m(E, u^N)$, $k = 1 \ldots r-1 \mod r$.

Soit $(S_h, B_h)_{h \in H}$ la liste de toutes les objections contre c_{k-1}, $k = 1 \ldots r-1$ mod r. Pour $h \in H$, posons

$$x(h) = \min\left\{u^i(z) \mid i \in S_h, z \in B_h\right\}. \tag{4.9}$$

De la définition de u, $x(h)$ ne dépend que de h, non de $i \in S_h$. Soit $x \in \{x(h) \mid h \in H\}$ tel que

$$\forall i \in \bigcup_{h \in H} S_h,\ \ \min\left\{u^i(x), u^i(x(h))\right\} > u^i(c_{k-1}) \Rightarrow u^i(x) \geq u^i(x(h)) \tag{4.10}$$

C'est-à-dire que s'il existe un joueur $i, i \in S_h$ et $h \in H$ qui préfère x et $x(h)$ à c_{k-1}, alors $x(h)$ est moins préféré que x. Cela nous permet de définir

$$H' = \left\{h \in H \mid u^{S_h}(B_h) = x\right\},$$

et pour $h \in H'$,

$$y(h) = \max\left\{u^i(z) \mid i \in S_h, z \in B_h\right\} \tag{4.11}$$

Soit alors $y \in \{y(h) \mid h \in H'\}$ tel que

$$\forall i \in \bigcup_{h \in H'} S_h,\ \ \min\left\{u^i(y), u^i(y(h))\right\} > u^i(c_{k-1}) \Rightarrow u^i(y) \leq u^i(x(h)) \tag{4.12}$$

Soit alors B un ensemble d'alternative tel que

$$B \in \left\{B_h \mid h \in H', \min_{z \in B_h} u^{S_h}(z) = x \text{ et } \max_{z \in B_h} u^{S_h}(z) = y\right\}, \tag{4.13}$$

et soit S la coalition définie par :

$$S = \left\{i \in N \mid u^i(B) > u^i(c_{k-1})\right\}$$

De la définition de $\mathcal{U}(N, A)$, si

$$\theta' = \min\left\{l = 1 \ldots r-1 \mid S \cap T_{k+l} \neq \emptyset, k+l = 1 \ldots r \mod r\right\},$$

alors

$$S = T_{k+\theta'} \cup \cdots \cup T_{k-1} \tag{4.14}$$

L'objection (S, B) *est Mas-Colell justifiée contre* c_{k-1}.

Si (T, C) est une contre-objection contre (S, B) alors que les contre objections sont des objections, alors il existe $h \in H$ tel que $(T, C) = (S_h, B_h)$. Dans ce cas,

$$u^{S_h}(B_h) > \left(u^{S_h \cap S}(B), u^{S_h \setminus S}(c_{k-1})\right) \tag{4.15}$$

- *Premier cas* : $S_h \subset S$. L'équation 4.15 devient

$$u^{S_h}(B_h) > u^S(B)$$

étant donné que $(S, B) = (S_{h'}, B_{h'})$ pour un $h' \in H'$, alors cette dernière équation est incompatible avec 4.9, 4.10 et 4.13.
- *Deuxième cas* : $S \subsetneq S_h$. Des équations 4.9, 4.10

$$u^{S_h}(x) \geq u^{S_h}(B_h) \tag{4.16}$$

Des équations 4.13 et 4.15

$$\min_{z \in B_h} u^{S \cap S_h}(z) \quad \geq \min_{z \in B_h} u^{S \cap S_h}(B) \quad = u^{S \cap S_h}(x) \tag{4.17}$$

Les équations 4.16 et 21 donnent

$$u^{S_h \cap S}(B_h) = u^{S_h}(x) = u^{S_h}(B_h)$$

Donc,

$$h \in H'$$

Des équations 4.11 et 4.12,

$$\max_{z \in B_h} u^{S \cap S_h}(z) \quad \geq \max_{z \in B_h} u^{S \cap S_h}(z) \quad = u^{S \cap S_h}(y) \tag{4.18}$$

De la définition de u dans l'équation 4.3, l'équation 4.18 devient

$$\max_{z \in B_h} u^{S_h}(z) \geq u^{S_h}(y)$$

Ce qui donne.

$$S_h \subset \left\{ i \mid u^i(B_h) \geq u^i(c_{k-1}) \right\} \subset \left\{ i \mid u^i(B) > u^i(c_{k-1}) \right\} = S$$

- *Troisième cas* : $S \cap S_h = \emptyset$. De la sur additivité de E, il existe $l \in H$ tel que $(S \cup S_h, B_h \cap B) = (S_l, B_l)$. Donc, $u^{S_l}(B \cap B_h) \geq \max\left\{u^{S_l}(B_h), u^{S_l}(B)\right\}$, i.e. (S_l, B_l) est une contre-objection contre (S, B) avec $S \subsetneq S_l$. Ce qui revient au deuxième cas.

- *Quatrième cas* : $S \cap S_h \neq \emptyset, S_h \setminus S \neq \emptyset, S \setminus S_h \neq \emptyset$. Soit

$$\theta = \min\left\{l = 0 \ldots r-1 \mid S_h \cap T_{k+l} \neq \emptyset, k+l = 1 \ldots r \mod r\right\}$$

De la définition de $\mathcal{U}(N, A)$ (équation 4.3) et de la monotonie de E, on peut remplacer

$$S_h := T_{k+\theta} \cup \cdots \cup T_{k-1}$$

Donc de l'équation 4.14, nous revenons au premier ou au deuxième cas.

□

Corollaire 4.2 *Pour chacune des classes de fonctions d'effectivité suivantes, le coeur stabilité est équivalent au marchandage stabilité à la Mas-Colell.*
1 - Classe des fonctions d'effectivité monotones, simples et propres ;
2 - Classe des fonctions d'effectivité monotones, maximales régulières ;
3 - Classe des fonctions d'effectivité monotones, anonymes et neutres sur-additive.

4.5 Conclusion

Ce travail est un extrait du papier commun de H. Keiding & D. Razafimahatolotra (26), dans lequel nous proposons un nouvel ensemble du marchandage : l'intersection entre la coalition de l 'objection et la coalition de la contre-objection est non vide. Cette définition nous a permis d'analyser les formes des dialogues dans une distribution de pouvoir donnée. Nous y montrons également que la structure du pouvoir à elle seule n'est pas suffisante pour caractériser la stabilité du marchandage, donc une nouvelle conception de la négociation est proposée.

5 Rationalisation d'une correspondance de choix social

Une correspondance de choix social est rationalisable s'il existe un mécanisme de pouvoir qui implémente sa solution. Nous proposons dans ce travail une caractérisation de la rationalisation des solutions d'une correspondance de choix social par le coeur ou l'ensemble de marchandage selon Mas-Colell d'une fonction d'effectivité. [1]

Mots clés : Fonction d'effectivité, correspondance de choix social, rationalité.

JEL Classification : D70, D71.

AMS Classification : 91A44

1. Ce chapitre a été tiré du travail commun de Hans Keiding et Razafimahatolotra D.

5.1 Introduction

Dans une société où les objectifs des joueurs sont divergents voire opposés, la question de choix publics qui relève d'une quête de l'intérêt général ou du souci au bien collectif pose problème sur plusieurs aspects. Premièrement, la question la plus préoccupante consiste à savoir "quelles sont la nature et la forme de l'intérêt général dans une norme sociale ou dans un profil des joueurs en vigueur". La question qui s'en suit consiste à savoir comment l'implémenter : l'existence d'un mécanisme rationnel qui soit acceptable sur le plan cognitif et faisable sur le plan technique. La notion de correspondance de choix social apporte une solution en proposant que l'intérêt général soit déterminé en fonction du profil des joueurs : l'ensemble des ordres faits par les joueurs sur les alternatives, lesquelles sont fixées *à priori* comme les candidats d'une élection ou les différentes propositions discutées dans un débat de décision. En matière de choix collectif, cette procédure simplifie énormément le mécanisme de choix social car premièrement les joueurs n'ont qu'à manifester leurs préférences sur les alternatives et deuxièmement, la règle de décision est mécanique et bénéficie de la propriété de transcendance et d'objectivité ; pourvu que les parties prenantes de la société acceptent sa validité. Pourtant, ces propriétés ne sont pas suffisantes pour dire que l'issue d'une correspondance choix social est rationnelle. En effet, une correspondance de choix social est à la fois une règle de décision et un mécanisme d'attribution de pouvoir : une permission d'opposer contre une classe d'alternatives. Ainsi, un joueur ou un groupe de joueurs rationnels, qui suit la logique de sa représentation et de ce qui est faisable, ne se contenterait pas de manifester sa préférence mais agirait selon les pouvoirs qu'il possède, dans les limites de la validité de la règle de choix social supposée acceptée par tous les joueurs. Un joueur rationnel agit donc selon les pouvoirs qu'il déduit de la règle de choix social pour influencer l'issue du jeu.

Une correspondance de choix social offre à chaque joueur plusieurs possibilités pour déterminer les limites de ses pouvoirs, mais pour simplifier, nous supposons que "les choses sont égales par ailleurs" : les joueurs agissent de la même manière, ce qui serait dû à l'existence d'une norme régularisant les comportements. Comme un pouvoir en possession sans engagement n'aura aucune conséquence sur l'issue du jeu, alors le mode de déduction des pouvoirs sur la base de la correspondance de choix social n'est que le premier niveau de la rationalisation. Le deuxième niveau de rationalisation concerne alors le mode d'exercice des pouvoirs dans une situation donnée. Dans ce travail, nous étudions deux modes d'implication des joueurs dans le processus de détermination de l'issue du jeu : le premier, connu sous le nom de coeur, consiste à exclure les alternatives opposées par un groupe de joueurs alors que le second, connu sous le nom de marchandage, consiste à n'exclure que les alternatives opposées sans contestation.

Nous donnons dans ce travail des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une correspondance de choix social soit rationalisable selon le coeur d'une fonction d'effectivité. Nous donnons également des conditions nécessaires pour la rationalisation par rapport au marchandage de

Mas-Colell. À la fin de ce chapitre, nous proposons *un indice de contestabilité* d'une règle de vote, un indicateur pour évaluer la probabilité de contre une issue sociale sélectionnée par la règle.

5.2 Le modèle

Par convention, nous prenons comme hypothèse qu'un *joueur*, noté par i représente soit un individu, soit un groupe d'individu ou alors une institution. Le terme institution est à interpréter au sens organique et par conséquent, pas nécessairement selon une visée politique ou juridictionnelle. Nous proposons qu'*une société* puisse être évoquée comme un ensemble de n joueurs $N = \{1, \ldots, n\}$. *Une coalition* est un ensemble non vide de joueurs $S \subset N$ et on note $\mathcal{P}_0(N)$ l'ensemble des coalitions de N. *L'ensemble des alternatives*, noté $A = \{x_1, \ldots, x_m\}$ regroupe tous les états possibles de la société.

La règle du choix collectif est organisée selon la procédure suivante : la société se donne des ensembles de notation Y, $k = 1 \ldots \varphi$ ($|Y| \leq m$), puis chaque joueur associe à chaque $x \in A$ un point dans Y. Les points donnés par les joueurs seront transformés par une règle, identifiée *à priori* par la société, en critère de choix social. Formellement, à chaque $i \in N$, on peut associer une application $w^i : A \longrightarrow Y$, qui sera appelée par la suite *préférence* de i sur A. L'ensemble de préférences sur A est noté par $\mathcal{L}(A, Y)$ et tout simplement $\mathcal{L}(A)$ si Y est isomorphe à $\{1, \ldots, m\}$. Dans ce cas, nous utilisons la notation R^N au lieu de u^N. Pour une coalition $S = \{i_1, \ldots, i_s\}$, un $S-$profil est un élément de $\mathcal{L}(A, Y)^S$. Une *correspondance de choix social*, qui définit la règle du choix collectif est une correspondance $H : \mathcal{L}(A, Y)^N \longrightarrow \mathcal{P}(A)$. Les éléments de $H(u^N)$ sont appelés *les issues sociales retenues* dans la règle H. D'habitude, l'espace d'arrivé d'une correspondance de choix social ne contient pas l'ensemble vide, mais ce qui nous intéresse dans ce travail ne concerne par la non vacuité de $H(u^N)$ mais de ses propriétés, alors nous tenons en compte dans cette étude le fait que $H(u^N)$ peut être vide pour un $u^N \in \mathcal{L}(A, Y)^N$.

Un mécanisme est une fonction $E : \mathcal{P}_0(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$, dite fonction d'effectivité, tel que $E(\emptyset) = \emptyset$, $E(N) = \mathcal{P}_0(A)$, $\emptyset \notin E(S)$ et $A \in E(S)$, $\forall S \in \mathcal{P}_0(N)$. La correspondance H est rationalisable s'il existe un mode de sélection de solution $\mathcal{S} : E \mapsto \mathcal{S}(E, .)$ tel que pour tout $R^N \in \mathcal{L}(A)^N$, $\mathcal{S}(E, R^N) = H(R^N)$. Dans ce travail, nous considérons seulement le coeur d'une fonction d'effectivité, noté $\mathcal{C}(E, .)$ et l'ensemble de marchandage de Mas-Colell, noté $\mathcal{M}(E, .)$. A cet effet, rappelons qu'une *objection* contre une alternative $x \in A$ dans un profil $R^N \in \mathcal{L}(A)^N$ est une paire (S, B) satisfaisant

$$B \in E(S) \text{ et } \forall y \in B, \forall i \in S \ : y \ R^i \ x$$

Une *contre-objection* selon Mas-Colell contre (S, B) est une paire (T, C) telle que si u^N est la fonction d'utilité qui représente R^N,

$$C \in E(T) \text{ et } u^T(C) > (u^{T \setminus S}(x), u^{T \cap S}(B))$$

Une objection sans contre objection est dite justifiée. Ainsi

$$\mathcal{C}(R, R^N) = \{x \in A \mid \text{ sans objection contre } x\}$$
$$\mathcal{M}(E, R^N) = \{x \in A \mid \text{ sans objection justifiée contre } x\}$$

Pour un nombre réel x, notons $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\}$ et $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{N} \mid x \leq n\}$.

5.3 Choix social et mécanisme du pouvoir

Généralités

Dans ce paragraphe, nous admettons que pour tout $i \in N$, R^i est une bijection de A dans Y. Dans ce cas, nous notons $\mathcal{L}(A)$ l'ensemble des préférences sur A.

Soit $H : \mathcal{L}(A)^N \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ une correspondance de choix social. On dit que Q^N est déduit de R^N par une amélioration de x si pour tout $i \in N$ et pour tout $y \in A : x\ R^i\ y \Rightarrow x\ Q^i\ y$. Notons

$$R^N(x) = \left\{Q^N \mid\ Q^N \text{ est déduit de } R^N \text{ par une amélioration de } x\right\}$$

Paretienneté. Nous disons que H satisfait la condition de Pareto si $x\ R^i\ y$, $\forall i \in N$ entraîne $y \notin H(R^N)$.

Maskin monotonie. Nous disons que H est Maskin monotone si pour tout $x \in H(R^N)$ et pour tout $Q^N \in R^N(x)$, $x \in H(Q^N)$.

Antimonotonie. Nous disons que H est antimonotone si pour tout $y \notin H(R^N)$, pour tout $x \neq y$ et pour tout $Q^N \in R^N(x)$, $y \notin H(Q^N)$.

Détermination. Nous disons que H satisfait la détermination si pour tout $R^N \in \mathcal{L}(A)^N$, pour tout $y \notin H(R^N)$, alors il existe $S \in \mathcal{P}_0(N)$ et $B \supset \{x \mid x\ R^S\ y\}$ tels que

$$\forall Q^S \in \mathcal{L}(A)^S : [B\ Q^S\ y\ Q^S\ (A \setminus (B \cup \{y\}))] \Rightarrow [y \notin H(Q^S, R^{N \setminus S})] \quad (5.1)$$

Soit $E : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ une fonction d'effectivité. Alors :

Régularité. Nous disons que E est régulière si $\forall S_1, S_2 \in \mathcal{P}_0(N)$ et $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{P}_0(A) : B_k \in E(S_k)$ $(k = 1, 2)$ entraîne $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ ou $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$.

Maximalité. Nous disons que E est maximale si $\forall S \in \mathcal{P}_0(N)$ et $\forall B \in \mathcal{P}_0(A) : B \notin E(S)$ entraîne $A \setminus B \in E(N \setminus S)$.

Proposition 5.1 *Soit $H : \mathcal{L}(A)^N \longrightarrow \mathcal{P}_0(A)$ une correspondance de choix social satisfaisant l'antimonotonie. Alors, H est Maskin monotone.*

Preuve : Soient $R^N \in \mathcal{L}(A)^N$ et $x \in H(R^N)$. Admettons que H n'est pas Maskin monotone et soit $Q^N \in R^N(x)$ tel que $x \notin H(Q^N)$. Comme $Q^N \in R^N(x)$, alors il existe une suite $z_1, \ldots, z_r \in A \setminus \{x\}$ et une suite $Q_1^N, \ldots, Q_r^N \in \mathcal{L}(A)^N$ telles que $Q_{k+1}^N \in Q_k^N(z_k)$ et $R^N \in Q^N(z_r)$. Comme H est antimonotone, alors $x \notin H(Q^N)$ entraîne $x \notin H(Q_k^N)$ $(k = 1 \ldots r)$ et en particulier $x \notin H(R^N)$. Ce qui est absurde.

□

Pour chaque correspondance de choix social H, on peut associer une répartition de pouvoir E^H tel que $B \in E^H(S)$ signifie que dans la règle H, la coalition S a le pouvoir de bloquer toutes les alternatives en dehors de B. Le choix de E^H dépend de l'interprétation et du modèle que l'on fait du mode d'acquisition de pouvoir des joueurs. Dans tous les cas, les préférences sont les seuls moyens d'action pour la garantie du pouvoir. Dans ce travail, nous étudions les trois type de garanties de pouvoir E^H_α, E^H_β et E^H_κ définis comme suit :

$$E^H_\alpha(S) = \left\{B \mid \exists R^S \text{ tel que } \forall Q^{N\setminus S},\ H(R^S, Q^{N\setminus S}) \in B\right\}\ ;$$
$$E^H_\beta(S) = \left\{B \mid \forall Q^{N\setminus S}\ \exists R^S \text{ tel que },\ H(R^S, Q^{N\setminus S}) \in B\right\}\ ;$$
$$E^H_\kappa(S) = \left\{B \mid \forall R^N \in \mathcal{L}(A)^N,\ y \in A \setminus B :\ [B\ R^S\ y\ R^S\ A \setminus (B \cup \{y\})] \Rightarrow y \notin H(R^N)\right\}$$

Proposition 5.2 *Soit $H : \mathcal{L}(A)^N \longrightarrow \mathcal{P}_0(A)$ une correspondance de choix social. Alors, E^H_α et E^H_β sont des fonctions d'effectivité. Si H satisfait la condition de Pareto, alors E^H_κ est une fonction d'effectivité.*

Preuve : Pour E^H_α et E^H_β, voir Abdou & Keiding (5). Nous montrons que E^H_κ est une fonction d'effectivité. Il est évident que $E(\emptyset) = \emptyset$ et $A \in E(S), \forall S \in \mathcal{P}_0(N)$. De la propriété de Pareto $B\ R^N x$ implique que $y \notin H(R^N)$. Donc, $B \in E^H_\kappa(N), \forall B \in \mathcal{P}_0(A)$.

□

Illustrations

Nous considérons deux exemples très connus en matière de choix social : la règle de Condorcet et la règle de Borda. La règle de Condorcet peut rien sélectionner alors que la règle de Borda arrive toujours à sélectionner au moins une alternative. Donc, cette dernière est mieux que la règle de Condorcet en matière d'absence de cycle de Condorcet. Pourtant, nous verrons que si les coalitions utilisent la stratégie β pour garantir leurs pouvoirs, la règle de Borda offre plus de pouvoir que celle de Condorcet et donc la fréquence da la vacuité du coeur de la fonction d'effectivité associée à la règle de Borda est supérieure à la fréquence de la vacuité du coeur de la fonction d'effectivité associée à la règle de Condorcet. En effet, nous avons démontré que la fréquence de la vacuité du coeur d'une fonction d'effectivité simple et anonyme est une fonction décroissante de l'ordre minimal de ses cycles (47).

Exemple 5.1 *Règle de Condorcet.*
Soient $N = \{1, \ldots, n\}$ et $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$. On dit que x est dominé par y dans R^N si

$$\#\left\{i \mid x\ R^i\ y\right\} > \#\left\{i \mid y\ R^i\ x\right\} \tag{5.2}$$

Dans ce cas

$$H_c(R^N) = \left\{x \mid\ x \text{ n'est pas dominé dans } R^N\right\} \tag{5.3}$$

$\alpha-$EFFECTIVITÉ. *La répartition de pouvoir selon α : Stratégie prudente.*

Soient $S \in \mathcal{P}_0(N)$ et $B \in \mathcal{P}_0(A)$. Pour qu'au moins un élément de B ne soit pas dominé, les membres de S ont intérêt à choisir un $x \in B$ tel que pour tout $y \neq x : x\ R^i\ y$. Dans ce cas,

$$\forall y \neq x : \#\left\{i \mid x\ R^i\ y\right\} \geq s$$

Donc, pour neutraliser la tentative de S à forcer l'issue x, les joueurs restants regroupés dans $N \setminus S$ doivent accorder leurs préférences pour choisir $y \neq x$ de telle sorte que $\#\left\{i \mid y\ R^i\ x\right\}$ soit maximal. Les jeux de forces entre S et $N \setminus S$ font que x soit sélectionné malgré $N \setminus S$ si et seulement si

$$s \geq n - s$$

Sachant que cette équation ne dépend pas du nombre d'alternatives dans B, alors elle donne la répartition de pouvoir suivante

$$\forall S, |S| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, E_{\alpha}^{H_c}(S) = \{A\} \text{ et } \forall S, |S| \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, E_{\alpha}^{H_c}(S) = \mathcal{P}_0(A)$$

$\beta-$EFFECTIVITÉ. *La répartition de pouvoir selon β : Stratégie adaptative.*

Soient $S \in \mathcal{P}_0(N)$ et $B \in \mathcal{P}_0(A)$. Pour éviter que S puisse forcer une issue sociale dans B, les joueurs dans $N \setminus S$ doivent choisir un $y \notin B$ de telle sorte que $\#\left\{i \mid y\ R^i\ x\right\}$ soit maximal. Donc, ils doivent mettre y au top. Dans ce cas,

$$\forall x \in B : \#\left\{i \mid y\ R^i\ x\right\} \geq n - s$$

L'adaptation des membres de S à cette "hostilité" de $N \setminus S$ contre son pourvoir est d'harmoniser les préférences de ses membres pour qu'il trouve un $x \in B$ pour que $\#\left\{i \mid x\ R^i\ y\right\} \geq \#\left\{i \mid y\ R^i\ x\right\}$. En mettant x au top, cette équation se traduit par $s \geq n - s$. Par conséquent, on retrouve la distribution de pouvoir $E_{\alpha}^{H_C}$, i.e.

$$\forall S, |S| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, E_{\beta}^{H_c}(S) = \{A\} \text{ et } \forall S, |S| \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, E_{\beta}^{H_c}(S) = \mathcal{P}_0(A)$$

$\kappa-$EFFECTIVITÉ. *La répartition de pouvoir selon κ.*

Il n'est pas difficile de montrer que

$$E_{\kappa}^{H_C} = E_{\alpha}^{H_C} = E_{\beta}^{H_C}$$

Ici, la répartition du pouvoir donnée par l'une des ces fonctions d'effectivité reflètent la structure de la règle de décision. Par exemple, à un cycle de Condorcet : une suite d'alternatives $x_1, \ldots, x_p$ telle que x_1 est dominé par x_2, …, et x_p est dominé par x_1, on peut associer un cycle de fonction d'effectivité (Définition 2.1), et inversement un cycle de fonction d'effectivité donne lieu à un cycle de Condorcet. D'une autre manière, une situation d'absence de choix par la règle de Condorcet se traduit par l'existence de famille d'objections contre toutes les alternatives, et une alternative sélectionnée par la règle de Condorcet ne peut pas avoir une objection. Dans l'exemple qui suit, les cycles générés par la distribution de pouvoir ne reflètent plus le paradoxe de Condorcet. En matière d'analyse de pouvoir (44), (7), cette situation favorise l'écart entre le pouvoir formel, celui qui sera déduit de la règle de choix social, et le pouvoir réel, ce qui est déduit des stratégies des coalitions sur la base de cette règle.

Exemple 5.2 *Règle de Borda.*

Soient $N = \{1, \ldots, n\}$ et $A = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Pour $x \in A$, on note

$$b_i(x, R^N) = \#\left\{y \in A \mid x\ R^i\ y\right\} - \#\left\{y \in A \mid y\ R^i\ x\right\}$$

le score de x par $i \in N$ dans le profil $R^N \in \mathcal{L}(A)^N$. C'est-à-dire que $b_i(x, R^N)$ compte la différence entre le nombre des y avant et x et le nombre de y après x, selon la préférence de i. Donc, si R^N désigne les rangs des alternatives, i.e pour tout $i \in N$, R^i est une bijection de A dans $\{1, \ldots, m\}$, et x est placé au rang b selon i, alors :

$$b_i(x, R^N) = m - 2b + 1 \tag{5.4}$$

Donc, pour tout $R^N \in \mathcal{L}(A)^N$ et pour tout $x \in A$

$$b_i(x, R^N) \in \{m - 1, \ldots, m - 2b + 1, \ldots, -m + 1\}$$

Le *score de Borda de x* dans R^N est défini par le nombre :

$$b(x, R^N) = \sum_{i \in N} b_i(x, R^N), \tag{5.5}$$

$$H_{B}(R^N) = \left\{x \in A \mid b(x, R^N) \geq b(y, R^N),\ \forall y \in A\right\}$$

$\alpha-$EFFECTIVITÉ. *La répartition de pouvoir selon α : Stratégie prudente.*

Soient $S \in \mathcal{P}_0(N)$ et $B \subset A$. La coalition S est effective pour que l'issue sociale soit un élément de B s'il existe $x \in B$ et un $S-$profil R^S tel que quoi que $N \setminus S$ fasse en choisissant un $N \setminus S-$profl $Q^{N \setminus S}$, nous avons

$$\forall z \neq x : b(z, R^S, Q^{N \setminus S}) \leq b(x, R^S, Q^{N \setminus S}) \tag{5.6}$$

Afin de garantir (de manière optimale) le pouvoir d'exclure les alternatives en dehors de B, les membres de S doivent remplir les conditions suivantes :

- Choisir $x \in B$ de telle sorte que le score $b(x, R^S, Q^{N \setminus S})$ soit aussi élevé que possible
- Anticiper la réponse des joueurs dans $N \setminus S$, qui consisteraient à mettre au premier rang l'alternative $y \in A \setminus B$ telle que

$$\forall z \in A \setminus B : \sum_{i \in S} b_i(y, R^S, Q^{N \setminus S}) \geq \sum_{i \in S} b_i(z, R^S, Q^{N \setminus S}) \tag{5.7}$$

C'est-à-dire que y a obtenu le meilleur score, selon S, parmi les alternatives de $A \setminus B$.

La première condition entraîne que x est au premier rang pour $i \in S$, alors que la deuxième condition oblige aux membres de S à choisir R^S pour que le nombre suivant soit minimal

$$\max_{y \in A \setminus B} \sum_{i \in S} b(y, R^S, Q^{N \setminus S})$$

C'est-à-dire que les jeux de forces entre S et $N \setminus S$ pour que l'issue soit dans B (objectif de S, et à éviter pour $N \setminus S$) se traduisent par la structure de préférences suivantes

$$\begin{array}{ccccccc}
x_1 & \dots & x_1 & y & \dots & y \\
B \setminus \{x_1\} & \dots & B \setminus \{x_1\} & & & \\
x_{\varphi_1(b+1)} & \cdots & x_{\varphi_s(b+1)} & & & \\
\vdots & \dots & \vdots & & & \\
x_{\varphi_1(m)} & \cdots & x_{\varphi_s(m)} & x_1 & \dots & x_1 \\
R^{i_1} & \dots & R^{i_s} & Q^{i_{s+1}} & \dots & Q^{i_n}
\end{array}$$

avec $S = \{i_1, \dots, i_s\}$, $N \setminus S = \{i_{s+1}, \dots, i_n\}$, $x_1 \in B$, $A \setminus B = \{x_{b+1}, \dots, x_m\}$ et y la solution de l'équation 5.7. Les applications $\varphi_1, \dots, \varphi_s$ étant choisi pour que les scores sur S des $x_{b+1}, \dots, x_m$ soient les mêmes ou presque.

Ainsi, le pouvoir de S pour réaliser B se traduit par l'équation suivante

$$b(x, R^S, Q^{N \setminus S}) \geq b(y, R^S, Q^{N \setminus S})$$

Ce qui donne :

$$(m-1)s + (-m+1)(n-s) \geq \sum_{i \in S} b_i(y, R^S, Q^{N \setminus S}) + (m-1)(n-s) \quad (5.8)$$

Calcul de $\sum_{i \in S} b(y, R^S, Q^{N \setminus S})$.

Pour $s = 1$, $b(y, R^S, Q^{N \setminus S}) = m - 2b - 1$.
Dans ce cas, l'équation 5.8 devient :

$$(m-1)s + (-m+1)(n-s) \geq s(m-2b-1) + (m-1)(n-s) \quad (5.9)$$

Pour $s \geq 1$, nous avons pour tout $i \in S$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=b+1}^{m} b_i(x_k, R^S, Q^{N \setminus S}) &= \sum_{k=b+1}^{m} m - 2k + 1 \\
&= (m-b)(m+1) - 2\frac{(m+b+1)(m-b)}{2} \\
&= -b(m-b)
\end{aligned}$$

Donc,

$$\sum_{k=b+1}^{m} \sum_{i \in S} b(x_k, R^S, Q^{N \setminus S}) = \sum_{i \in S} \sum_{k=b+1}^{m} b(x_k, R^S, Q^{N \setminus S}) = -bs(m-b)$$

Cela permet de construire les applications $\varphi_1, \dots, \varphi_s$ pour que les scores sur S des x_k ($k = b+1, \dots m$) soient les mêmes. Dans ce cas, l'équation 5.8 devient

$$(m-1)s + (-m+1)(n-s) \geq -sb + (m-1)(n-s) \quad (5.10)$$

Donc

$$b \geq b_\alpha(s) = \left\lceil \frac{2n}{s}(m-1) \right\rceil - 3(m-1)$$

De l'équation 5.10, une coalition de taille s n'a aucune pouvoir, i.e. $B \in E(S) \Rightarrow b \geq m$, si et seulement si $s \leq 2n\frac{m-1}{4m-3}$. De même, une coalition de taille s a le plein pouvoir si et seulement si $s \geq 2n\frac{m-1}{3m-4}$, en particulier pour $s \geq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$. Ainsi, les pouvoirs selon la stratégie α sont donnés par

$$\begin{cases} \forall S, |S| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor & E_\alpha^{H_B}(S) = \{A\}\,; \\ \forall S, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq |S| \leq \lceil \frac{2n}{3} \rceil & B \in E_\alpha^{H_B}(S) \Leftrightarrow b \geq b_\alpha(s); \\ \forall, |S| \geq \lceil \frac{2n}{3} \rceil & E_\alpha^{H_B}(S) = \{A\}\,. \end{cases}$$

$\beta-$ EFFECTIVITÉ. *La répartition de pouvoir selon β : stratégie adaptative.*

Soient $S \in \mathcal{P}_0(N)$ et $B \in \mathcal{P}_0(A)$. Admettons que la coalition S a pour objectif de mettre l'issue sociale dans B alors que $N \setminus S$ s'efforce d'obtenir une issue en dehors de B. Comme $N \setminus S$ agit en premier, alors la coalition $N \setminus S$ est effective pour $y \in A \setminus B$ si elle remplie les deux conditions citées dans $\alpha-$effectivité ci-dessus, ce qui sont traduites en

$$\begin{array}{ll} (a)\ \forall i \in N \setminus S, \forall y \notin B : & y\ R^i\ x, \forall x \in B \\ (b)\ \forall Q'^{N\setminus S} \in \mathcal{L}(A)^{N\setminus S} : & \max\left\{ b(x, Q^{N\setminus S}) \mid x \in B \right\} \leq \max\left\{ b(x, Q'^{N\setminus S}) \mid x \in B \right\} \end{array}$$

Or, la condition (a) entraîne que

$$\begin{aligned} \sum_{x\in B} \sum_{i \in N\setminus S} b_i(x, Q^{N\setminus S}) &= (n-s)[(2b-1-m) + \cdots + (1-m)]; \\ &= b(n-s)(b-m) \end{aligned}$$

La condition (b) est équivalente à la résolution d'un problème de type : $\min_{x\in B} \max_{y\in A} \zeta(x,y)$ sous la contrainte $\sum_{x\in B} \sum_{y\in A} \zeta(x,y)$ est une constante. Le minimum est atteint si

$$\sum_{i\in N\setminus S} b_i(x, Q^{N\setminus S}) = (n-s)(b-m),\ \forall x \in B \tag{5.11}$$

Après le choix de $N \setminus S$ d'un profil satisfaisant 5.11, la meilleure réponse de S peut être traduite par

$$\forall R'^S \in \mathcal{L}(A)^S : \max_{x\in B}\ b(x, R^S, Q^{N\setminus S}) \geq \max_{x\in B}\ b(x, R'^S, Q^{N\setminus S})$$

Dans ce cas,

$$\max_{x\in B}\ b(x, R^S, Q^{N\setminus S}) = s(m-1) + (n-s)(b-m) \tag{5.12}$$

Comme

$$\max_{y\notin B} b(y, R^S, Q^{N\setminus S}) = (n-s)(m-1) + s(1-m) \tag{5.13}$$

Alors une coalition de taille s a le pouvoir de bloquer $(m-b)$ alternatives si nous avons Eq.5.12$\geq$ Eq.5.13. Ce qui donne :

$$-(n-s)(m-b) + s(m-1) \geq (n-s)(m-1) + s(1-m) \tag{5.14}$$

C'est-à-dire qu'une coalition de taille s a le pouvoir de forcer une issue sociale dans B si

$$b \geq b_\beta(s) = (2m-1) - \left\lfloor \frac{2s}{n-s}(m-1) \right\rfloor \tag{5.15}$$

De l'équation 5.14, une coalition de taille s n'a aucun pouvoir, $B \in E(S) \Rightarrow b \geq m$, si et seulement si $s \leq \frac{n}{3}$. De même, une coalition de taille s a le plein pouvoir si et seulement si $s \geq \frac{n}{2}$, en particulier pour $s \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Ainsi, les pouvoirs selon la stratégie β sont donnés par

$$\begin{cases} \forall S, |S| \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor & E_\alpha^{H_B}(S) = \{A\}\,; \\ \forall S, \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1 \leq |S| \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1 & B \in E_\beta^{H_B}(S) \Leftrightarrow b \geq b_\beta(s); \\ \forall S, |S| \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil & E_\beta^{H_B}(S) = \{A\}\,. \end{cases}$$

$\kappa-$ EFFECTIVITÉ. *La répartition de pouvoir selon κ.*

Soient $S \in \mathcal{P}_0(N)$, $B \subset A$, $y \in A \setminus B$. Pour que S soit effectif pour bloquer l'issue y via B, il faut que les préférences des joueurs de S répondent aux stratégies de $N \setminus S$, une coalition qui a intérêt à

– minimiser les scores des alternatives de B.
– maximiser le score de y pour que celui-ci soit supérieur au meilleur score des éléments de B

Donc, les joueurs de S devront choisir un $x \in B$ comme la meilleure alterative. Dans ce cas, les jeux de force entre S et $N \setminus S$ sont déterminés par l'équation $b(x, R^S, Q^{N\setminus S}) \geq b(y, R^S, Q^{N\setminus S})$, ce qui se traduit par :

$$s(m-1) + (n-s)(-m+1) \geq s(m-2b-1) + (n-s)(m-1)$$

Ce qui donne :

$$b \geq b_\kappa(s) = \left\lceil \frac{2n}{s}(m-1) \right\rceil - 2(m-1)$$

Donc, une coalition de taille s n'a aucun pouvoir si et seulement si $s \leq 2n\frac{m-1}{3m-2}$, et elle a le plein pouvoir si et seulement si $s \geq 2n\frac{m-1}{2m-1}$, donc $s \geq n$. C'est-à-dire que seule la coalition N a le plein pouvoir. Par conséquent, la distribution des pouvoirs selon κ est donnée par

$$\begin{cases} \forall S, |S| \leq \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor & E_\kappa^{H_B}(S) = \{A\}\ ; \\ \forall S, |S| \geq \lceil \frac{2n}{3} \rceil & B \in E_\kappa^{H_B} \Leftrightarrow b \geq b_\kappa(s). \end{cases}$$

REMARQUE. *On peut vérifier que $\forall S \in \mathcal{P}_0(A)$, $E_\kappa^{H_B}(S) \subset E_\alpha^{H_B}(S)$, ce qui sera démontré dans le cas général dans la proposition 5.3 suivante.*

Si tous les joueurs agissent de manière β, H_B offre plus de pouvoir que H_C. En particulier, pour n pair $E_\beta^{H_B}$ n'est pas régulier, donc possède un cycle de longueur 2, alors que pour n pair, il possède un cycle de longueur 3. Par contre, si les joueurs agissent de manière α ou κ, H_B n'offre que des pouvoirs très limités, moins que proportionnel proportionnel ($\leq$

$\lceil \frac{n}{s} m \rceil - 1)$. C'est-à-dire qu'ils sont coeur-stables (Théorème de H .Moulin (31)).

D'une manière générale, ces distributions de pouvoir satisfont les propriétés suivantes.

Proposition 5.3 *Soit $H : \mathcal{L}(A)^N \longrightarrow \mathcal{P}_0(A)$ une correspondance de choix social. Alors :*
a) $\forall S \in \mathcal{P}_0(N) : E^H_\kappa(S) \subset E^H_\alpha(S)$;
b) E^H_κ *et* E^H_α *sont réguliers ;*
c) E^H_β *est maximale ;*
d) *Si* E^H_κ *est maximal, alors* $\forall S \in \mathcal{P}_0(N) : E^H_\beta(S) = E^H_\kappa(S)$.

Preuve :

a) Soient $S \in \mathcal{P}_0(N)$ et $B \in E^H_\kappa(S)$. Si $B = A$, alors $B \in E^H_\alpha$. Supposons que $B \subsetneq A$, et soit $x \notin B$. Soit $R^S \in \mathcal{L}(A)^S$ tel que $B\ R^S\ x\ R^S\ [A \setminus B \cup \{x\}]$ et choisissons $R^{N\setminus S}$ arbitraire. De la définition de E^H_κ, nous obtenons $x \notin H$. S'il existe $y \notin B$ tel que $y \in H(R^N)$, alors nous considérons le S profil Q^S tel que pour chaque $i \in S$, Q^i est déduit de R^i par une amélioration de la position de y pour avoir

$$\forall i \in S : B\ Q^i\ y\ Q^i\ [A \setminus (B \cup \{y\})]$$

C'est-à-dire que

$$y \notin H(Q^S, R^{N\setminus S}) \tag{5.16}$$

Comme H est Maskin monotone (Lemme 5.1), alors $y \in H(R^N)$ implique $y \in H(Q^S, R^{N\setminus S})$. Ce qui est en contradiction avec l'équation 5.16 Par conséquent, $H(R^N) \subset B$, et comme $R^{N\setminus S}$ a été choisi arbitrairement, alors $B \in E^H_\alpha(S)$.

b) Montrons que E^H_α est régulier. Supposons qu'il existe $S \in \mathcal{P}_0(N)$ et $B \in \mathcal{P}_0(A)$ tels que $B \in E(S)$ et $A \setminus B \in E(N \setminus S)$. Alors, il existe $R^S \in \mathcal{L}(A)^S$ tel que pour tout $Q^{N\setminus S}$, $H(R^S, Q^{N\setminus S}) \subset B$. De même, il existe $U^{N\setminus S} \in \mathcal{L}(A)^{N\setminus S}$ tel que pour tout $V^S \in \mathcal{L}(A)^S$, $H(V^S, U^{N\setminus S}) \subset A \setminus B$. En prenant $Q^{N\setminus S} := U^{N\setminus S}$, nous avons $H(R^S, U^{N\setminus S}) \subset B \cap (A \setminus B)$. Ce qui est contraire à la définition de H.

Comme $E^H_\kappa(S) \subset E^H_\alpha(S), \forall S \in \mathcal{P}_0(N)$, alors E^H_κ est régulier.

c) Montrons que E^H_β est maximal. Supposons qu'il existe $S \in \mathcal{P}_0(N)$ et $B \in \mathcal{P}_0(A)$ tels que $B \notin E^H_\beta(S)$ et $A \setminus B \notin E^H_\beta(N \setminus S)$. Alors, pour un $R^S \in \mathcal{L}(A)^S$, $H(R^S, Q^{N\setminus S}) \setminus B = \emptyset, \forall Q^{N\setminus S}$ et pour un $U^{N\setminus S} \in \mathcal{L}(A)^{N\setminus S}$, $H(V^S, U^{N\setminus S}) \cap B \neq \emptyset, \forall V^S \in \mathcal{L}(A)^S$. En prenant $Q^{N\setminus S} = U^{N\setminus S}$, nous avons $H(R^N, U^{N\setminus S}) \setminus B \neq \emptyset$ et $H(R^N, U^{N\setminus S}) \setminus [A \setminus B]B \neq \emptyset$, ce qui est impossible.

d) Si E^H_κ est maximal tandis que $E^H_\kappa(S) \subset E^H_\alpha(S), \forall S \in \mathcal{P}_0(A)$, alors E^H_α est maximal et $E^H_\beta(S) = E^H_\alpha(S), \forall S \in \mathcal{P}_0(A)$ (Cf Abdou & Keiding (5)). Soit alors $S \in \mathcal{P}_0(N)$ et $B \in \mathcal{P}_0(A)$ tels que $B \notin E^H_\kappa(S)$. De la maximalité de E^H_κ, $A \setminus B \in E^H_\kappa(N \setminus S)$. De a),

$$A \setminus B \in E^H_\alpha(S), \tag{5.17}$$

et de b), E^H_α est régulier, alors $B \notin E^H_\alpha(S)$. Comme $E^H_\alpha(S) = E^H_\beta(S)$, nous avons :

$$B \notin E^H_\beta(S) \tag{5.18}$$

Ce qui montre que $E^H_\beta(S) \subset E^H_\kappa(S), \forall S \in \mathcal{P}_0(N)$.

$\square$

5.4 Théorèmes principaux

Les théorèmes suivants donnent les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une correspondance de choix social soit rationalisable au sens du coeur ou au sens du marchandage par une fonction d'effectivité. C'est-à-dire qu'il n'a y pas de contraste entre l'issue sociale sélectionnée par la règle associée à la correspondance de choix social et l'issue sociale issu du mécanisme de non opposition induit par la distribution des pouvoirs aux travers des coalitions.

Théorème 5.1 *Soit $H : \mathcal{L}(A)^N \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ une correspondance de choix social. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *H satisfait* l'antimonotonie, la paretienneté *et* la détermination *;*

(ii) *il existe une fonction d'effectivité E^H_κ telle que*

$$\forall R^N \in \mathcal{L}(A)^N : H(R^N) = \mathcal{C}(E^H_\kappa, R^N)$$

Preuve : (ii)⇒(i). Montrons que H satisfait les conditions de (i).

Pareto : S'il existe $y \in A$ tel que $y\ R^i\ x, \forall i \in N$, alors $(N, \{y\})$ est une objection contre x. Donc, $y \notin \mathcal{C}(E^H, R^N) = H(R^N)$.

Antimonotonie : Soient $R^N \in \mathcal{L}(A)^N$ et $y \in A$ tels que $y \notin \mathcal{C}(E^H_\kappa, R^N)$. Alors, il existe une paire (S, B) telle que $B\ R^S\ y$. Si $Q^N \in \mathcal{L}(A)^N$, obtenu à partir de R^N en améliorant la position de $x \neq y$, alors $B\ Q^N\ y$. Donc, $y \notin H^(Q^N)$.

Détermination : Soient $R^N \in \mathcal{L}(A)^N$ et $y \in A$ tels que $y \notin \mathcal{C}(E^H_\kappa, R^N)$. Donc, il existe une paire (S, B) telle que (S, B) soit une objection contre y dans R^N. Soit alors Q^N tel que $B\ Q^S\ Q^S\ [A \setminus (B \cup \{y\})]$, alors (S, B) est une objection contre y dans le profil $(Q^S, R^{N \setminus S})$. C'est à dire que $y \notin H(Q^S, R^{N \setminus S})$.

(i)⇒(ii). Comme H satisfait la condition de Pareto, alors E^H_κ est une fonction d'effectivité. Il nous reste à montrer que $H(R^N) = \mathcal{C}(E^H_\kappa, R^N)$. Soit $R^N \in \mathcal{L}(A)^N$ et $y \in A$ tels que $y \notin \mathcal{C}(E^H_\kappa, R^N)$. Par définition de E^H, κ, $y \notin H(Q^S, R^{N \setminus S})$ où $B\ Q^S\ [A \setminus (B \cup \{y\})]$. Sans nuire à la généralité, nous pouvons admettre que $R^N_{/B} = Q^N_{/B}$ et $R^N_{/[A \setminus (B \cup \{y\})]} = Q^N_{/[A \setminus (B \cup \{y\})]}$. Ce qui nous permet de déduire R^N à partir de Q^N par une amélioration successive des positions des $s \notin B$. De l'antimonotonie de H, nous obtenons $y \notin H(R)^N$. Réciproquement, $R^N \in \mathcal{L}(A)^N$ et $y \in A$ tels que $y \notin H(R^N)$, alors du principe de détermination, $B = \{x \mid x\ R^S\ y\} \in E^H_\kappa(S)$, ce qui montre que (S, B) est une objection contre y. Donc, $y \notin \mathcal{C}(E^H_\kappa, R^N)$.

$\square$

Comme le montre les exemples 5.1 et 5.2, la correspondance de choix social associée à la règle de Condorcet satisfait à ces trois conditions alors que celui de Borda ne l'est pas. En effet,

Exemple 5.3 *La règle de Borda ne satisfait pas l'antimonotonie.*

Soient $N = \{1, \ldots, 4\}$, $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ et R^N le profil montré dans le tableau suivant

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_1 & x_1 & x_1 \\ x_2 & x_2 & x_2 & x_2 \\ x_3 & x_3 & x_3 & x_3 \\ R^1 & R^2 & R^3 & R^4 \end{array}$$

Donc $x_2 \notin H_B(R^N)$. Par contre, si $Q^N \in R^N(x_3)$ est le profil dans le tableau suivant

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_1 & x_3 \\ x_2 & x_2 & x_2 & x_2 \\ x_3 & x_1 & x_3 & x_1 \\ Q^1 & Q^2 & Q^3 & Q^4, \end{array}$$

alors
$$b(x_1, Q^N) = b(x_2, Q^N) = b(x_3, Q^N) = 0$$

Cet exemple montre également la différence entre la monotonie et l'antimonotonie. La règle de Borda satisfait la monotonie au sens de Maskin.

Théorème 5.2 *Soit $H : \mathcal{L}(A)^N \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ une correspondance de choix social telle que $H(R^N) = \mathcal{M}(E^H_\kappa, R^N)$. Alors, H satisfait la condition de Pareto et la détermination.*

Preuve : La condition de Pareto fait partie de la définition du marchandage de Mas-Colell. Donc, il suffit de montrer que H satisfait la détermination.

Par l'absurde. Soient $R^N \in \mathcal{L}(A)^N$ et $y \notin \mathcal{B}_m(E, R^N)$. Soient (S, B) une objection justifiée selon Mas-Colell contre y et $R^N \in \mathcal{L}(A)^N$ tels que $B \in E^\star(S, R^N)$. Pour simplification, notons u^N la fonction d'utilité associée à R^N et v^N la fonction d'utilité associée à Q^N. Alors :

$$v^S(B) > v^S(y) > \max_{x \in B \cup \{y\}} v^S(x) \tag{5.19}$$

Donc, $B \in E^\star(S, v^S, u^{N \setminus S})$ et (S, B) est une objection contre y dans u^N.
Si $y \in \mathcal{B}_m(E, v^S, u^{N \setminus S})$, alors il existe une paire (T, C) telle que $C \in E(T)$ et

$$\left(v^{S \cap T}(C), u^{T \setminus S}(C)\right) > \left(v^{S \cap T}(B), u^{T \setminus S}(y)\right) \tag{5.20}$$

Si $S \cap T = \emptyset$, l'équation 5.20 devient

$$u^T(C) > u^T(y)$$

Donc, (S, B) admet une contre objection dans u^N. Ce qui est contraire au choix de (S, B). Si $S \cap T \neq \emptyset$, nous avons en particulier :

$$\forall i \in S \cap T,\ v^i(C) > v^i(B) > v^i(A \setminus (B \cup \{y\}))$$

Ce qui entraîne que $C \cap [A \setminus (B \cup \{y\})] = \emptyset$, i.e

$$C \subset B$$

Par conséquent :

$$u^S(C) \geq u^S(B) \tag{5.21}$$

De l'équation 5.20, $u^{T\setminus S}(C) > u^{T\setminus S}(y)$, alors de l'équation 5.21,

$$u^T(C) > \left(v^{S\cap T}(B), u^{T\setminus S}(y)\right) \tag{5.22}$$

C'est-à-dire que (S, B) admet une contre objection dans u^N, ce qui contredit le choix de (S, B). D'où

$$y \notin \mathcal{B}_m(E, v^S, u^{N\setminus S})$$

$\square$

Nous tenons à remarquer que la correspondance ce choix social $\mathcal{M}(E,)$ n'est ni monotone ni anti-monotone. En effet, considérons l'exemple 4.5 (Chapitre 4). Dans le profil $v^N = u^N$ sauf d est au top alternative pour le joueur 8, nous avons $d \notin \mathcal{M}(E, v^N)$.

5.5 Discussion : Consistance d'une correspondance de choix social

Le nombre de réponses et de choix possibles dans un vote peut ne pas être égal au nombre des alternatives. Le vote à deux tours où les joueurs n'ont le choix qu'*approuver* ou *désapprouver* les candidats en sont des exemples. Donc, dans cette discussion, nous reprenons le cas général où $|Y| \leq m$. Donc, si u^i est la fonction d'utilité associée à la préférence de i, alors $u^i(y)$ correspond à la note attribuée par i de $x \in A$. Comme auparavant, pour une correspondance de choix social H, on peut associer au moins trois mode de distribution de pouvoir E^H_α, E^H_β, E^H_κ. De la proposition 5.3

$$\forall S \in \mathcal{P}_0(N) : E^H_\alpha(S) \subset E^H_\alpha(S) \subset E^H_\beta(S),$$

alors les joueurs ont intérêt à jouer selon β, ce qui leur offre un pouvoir maximal. Dans ce cas, comme le montre l'exemple 5.2, même pour une règle aussi consistante que celle de borda, il est possible qu'une famille de coalitions puisse bloquer toutes les issues sociales dans E_β. En effet, admettons qu'il y a $2n$ joueurs dans l'exemple 5.2, alors une coalition de n joueurs a le pouvoir de bloquer n'importe quelle alternative. Dans ce cas, si pour deux coalitions disjointes S_1 et S_2 et deux ensembles d'alternatives disjoints B_1 et B_2 tels que les éléments de B_1 sont préférés à ceux de B_2 par tous les membres de S_1, et les éléments de B_2 sont préférés à ceux de B_1 par tous les membres de S_2, alors aucune alternative est sans objection. Pourtant, si H désigne la correspondance de choix social associé à la règle de Borda, alors $H(R^N) \neq \emptyset, \forall R^N \in \mathcal{L}(A, Y)$. Par conséquent, il existe au moins une préférence $R^N \in \mathcal{L}(A, Y)$ telle que $x \in H(R^N)$ soit contesté par au moins une coalition $S, |S| \geq n$, i.e $x \notin \mathcal{C}(E^H\beta, R^N)$. Donc, H est contesté dans R^N, et le nombre de couple (x, R^N) tel que $x \in H(R^N)$ alors que $x \notin \mathcal{C}(E^H_\beta, R^N)$ donne une indication sur la fréquence de contestation des issues de H.

Soit alors

$$\begin{cases} \tau(H,x,R^N) = & 1 \text{ si } x \in H(R^N) \text{ et } x \text{ soit opposable dans } R^N\ ; \\ & 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Alors

Indice de contestation. *L'indice de contestation de la correspondance de choix social H est donné par le nombre*

$$\tau(H) = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{|\mathcal{L}(A,Y)|}\right)^n \sum_{(x,R^N)\in A\times\mathcal{L}(A)^N} \tau(H,x,R^N) \tag{5.23}$$

Proposition 5.4 *Pour tout $H : \mathcal{L}(A,Y)^N \longrightarrow \mathcal{P}_0(A)$, nous avons :*

$$0 \leq \tau(H) \leq 1$$

Pour illustration, considérons $N = \{c_1, c_2, c_3\} = A$ et H_1 et H_2 les deux modes de scrutin suivant

Scrutin H^1. *Vote par approbation.*

L'ensemble de notes $Y = \{0,1\}$, et le candidat $c \in A$ est dans $H(u^N)$ si pour aucun $c' \in A$, $\sum_{i\in N} u^i(c) < \sum_{i\in N} u^i(c')$. Dans ce cas, une coalition S a le pouvoir d'opposer au candidat $c \in A$ si à chaque fois que $N \setminus S$ est dans le profil $u^{N\setminus S}$ tel que $\forall i \in N \setminus S,\ u^i(c) > u^i(c')$, il existe un $S-$profil u^S tel que $c \notin H(u^N)$. Il n'est pas difficile de voir que

$$E^{H_1}(\{c_k\}) = \{A\} \text{ et } \forall s \geq 2,\ E^{H_1}(S) = \{B \subset N \mid B \neq \emptyset\} = \mathcal{P}_0(A)$$

$$\tau(H^1) = 0$$

Scrutin H^2. *Vote par évaluation.*

L'ensemble de notes $Y = \{-1,0,1\}$, et le candidat $c \in A$ est dans $H(u^N)$ si pour aucun $c' \in A$, $P(c) = \sum_{i\in N} u^i(c) < \sum_{i\in N} u^i(c') = P(c')$. Par un raisonnement analogue, on peut montrer que

$$\forall S \in \mathcal{P}_0(N) :\ E^{H_1}(S) = E^{H_2}(S)$$

Soit u^N le profil défini dans le tableau suivant

+1	c_1	c_2	c_2
0	c_3	c_1	c_1
- 1	c_2	c_3	c_3
Note	u^{c_1}	u^{c_2}	u^{c_3}

Alors, les points des candidats $c_1,\ c_2,\ c_3$ sont

$$P(c_1) = 1,\ \ P(c_2) = 1,\ \ P(c_3) = -1 \text{ et}$$

Donc

$$H(u^N) = \{c_1, c_2\}$$

On remarque que pour tout u^N, $H(u^N) \neq \emptyset$, donc en particulier, l'indice de contestation est égal au nombre de paradoxe de Condorcet de E^{H_2}. Pour le calcul de la fréquence de la vacuité du coeur d'une fonction d'effectivité, une généralisation du calcul de la fréquence du paradoxe de Condorcet, voir (47). Par conséquent :

$$\tau(H^2) = \frac{3!3!}{3!^3} = \frac{1}{6}$$

Pour finir, admettons que R^N soit une bijection entre A et $\{1, \ldots, m\}$. Disons que x est dit $q-$dominé par y dans R^N si $\{i \mid y\ R^i\ x\} \geq q$.

Proposition 5.5 *Soit H_q la correspondance de choix social définie par $H_q(R^N) = \{x \mid x \text{ n'est pas } q - \text{dominé dans } R^N\}$. Alors :*

$$\tau(H_q) = 0$$

Preuve. Comme dans l'exemple 5.1, on peut montrer que

$$E_\alpha^{H_q} = E_\beta^{H_q} = E_\kappa^{H_q}$$

Du théorème 5.1, pour monter que $H_q(R^N) = \mathcal{C}(E_\beta^{H_q}, R^N)$, il suffit de montrer que H_q satisfait la paretienneté, l'antimonotonie et et la détermination.

Pareto. Si $x\ R^i\ y, \forall i \in N$, alors $\#\{i \mid x\ R^i\ y\} \geq q$. Donc, $y \notin H(R^N)$.

Antimonotonie. Soient $y \notin H_q(R^N)$ et $Q^N \in R^N(x), x \neq y$. Alors, il existe $z \neq y$ tel que $\#\{i \mid z\ R^i y\} \geq q$. Si $z = x$, alors $\#\{i \mid x\ R^i\ y\} \leq \#\{i \mid x\ Q^i\ y\}$. Donc, $y \notin H_q(Q^N)$. Si $z \neq x$, alors les restrictions de R^N et de Q^N sur $A \setminus \{x\}$ sont les mêmes. Donc, $\#\{i \mid x\ R^i\ y\} = \#\{i \mid x\ Q^i\ y\}$, i.e. $y \notin H_q(Q^N)$.

Détermination. Si $S = \{i \mid x\ R^i\ y\}$ tel que $|S| \geq q$, et si R^N est un profil tel que $x\ R^S\ y\ R^S[A \setminus (x,y)]$, alors $y \notin H_q(R^N)$.

□

5.6 CONCLUSION

Une correspondance de choix social est un moyen de simplification de la gestion des pouvoirs et de la prise de décision. Si tous les joueurs respectent les limites de leurs pouvoirs selon la règle donnée, alors l'indice de consistence basé sur la rationalisation peut bien mesurer le contraste entre le pouvoir réel et le pouvoir formel. Pourtant, la question de rationalisation dépasse largement le cadre du choix social et les joueurs peuvent jouir d'une autre source de pouvoir, différente de la convention dictée par la règle du choix social. Dans ce cas, le problème de consistence ouvre d'autres dimensions du problème de la gouvernance. Tel en est l'objectif de chapitre suivant, qui aborde de manière systématique la question de la rationalisation et de de gouvernance.

6 Application à la théorie de la gouvernance

Les théories institutionnelles se sont développées autour de la polarisation de la société en individus et institutions. La recherche d'un compromis sur la convergence de ces deux pôles devient alors la tâche principale de cette classe de théories. Ce travail qui s'inscrit dans l'institutionnalisme tente d'entrer au coeur du problème de la rationalité et de la sélection de l'issue sociale en posant en même temps des questions épistémiques autour de la fonction d'effectivité. C'est est un début d'un essai sur la théorie pure du pouvoir, une théorie alternative aux théories institutionnelles existantes.

Mots-clés : Rationalité, distribution des pouvoirs, fonction d'effectivité.

JEL Classification : C71, C79.

6.1 Introduction

Une organisation est un ensemble d'acteurs agissant selon la structure du pouvoir et la distribution de l' autorité. Le pouvoir est la capacité d'une coalition à atteindre un objectif visé alors que l'autorité est une position relative du joueur par rapport aux autres. Par son origine, le pouvoir est acquis par un processus d'actions et de stratégies des membres d'un groupe ou par une distribution conventionnelle des champs d'action de chaque coalition. Dans les deux cas, une forme de rationalité apparaît, ce qui explique le choix d'un l'état social par les alternatives possibles.

L'acception du mot rationnel et le choix du niveau d'implication de la rationalité au cours de notre analyse sont basés sur les instruments de la théorie des jeux (jeux stratégiques, jeux coopératifs et jeux coalitionnels) et de la théorie du choix social. Ce travail ne se limite pas à élucider des problèmes relatifs au pouvoir et de son mécanisme, mais tente d'exposer les fondements épistémiques d'une théorie pure de pouvoir (un système d'organisation fondé sur le pouvoir et ses mécanismes). Cette dernière étant la fin visée par cette recherche. Ce travail aura trois parties. Dans la première partie, nous discutons de la rationalité de l'allocation et de la distribution des pouvoirs dans une organisation. Dans la deuxième partie, nous discutons de la rationalité de l'usage des pouvoirs : *comment les joueurs agissent-ils en fonction de leurs pouvoirs*? Dans la dernière partie, nous discutons du problème de contrôle de pouvoir afin qu'il y ait une régularité.

6.2 Le modèle

Une organisation est représentée par n joueurs, $N = \{1, \ldots, n\}$ et m alternatives $A = \{x_1, \ldots, x_m\}$. L'ensemble des parties d'un ensemble X est noté par $\mathcal{P}(X)$ et l'ensemble des parties non vide par $\mathcal{P}_0(X)$. Une coalition est un ensemble $S \subset N$, $S \neq \emptyset$. L'ensemble des ensembles d'alternatives qu' une coalition S a le pouvoir de réaliser est représenté par $E(S) \subset \mathcal{P}_0(A)$. Donc, $B \in E(S)$ signifie que S a le pouvoir de bloquer l'issue sociale $x \notin B$. L'ensemble $E(S)$ décrit donc les pouvoirs de S dans l'organisation, et la fonction E qui satisfait $E(N) = \mathcal{P}_0(A)$, $E(\emptyset) = \emptyset$ et $A \in E(S)$, $\forall S \in \mathcal{P}_0(N)$, appelée *fonction d'effectivité*, représente la distribution des pouvoirs dans l'organisation. Une répartition des pouvoirs entre les coalitions d'une organisation peut résulter des conséquences des actions des joueurs, du mécanisme d'une règle de choix social ou d'une distribution conventionnelle et factuelle des pouvoirs. Si le pouvoir découle des actions des joueurs, chacun d'entre eux est doté d'un espace de stratégies Σ_i, et l'action conjointe d'une coalition S est un élément de $\prod_{i \in S} \Sigma_i = \Sigma_S$. La conséquence en matière d'état social d'une stratégie $\sigma \in \Sigma_N$ est notée $\pi(\sigma)$, où π appelé *fonction de conséquence* est une application surjective de $\Sigma_N \rightarrow A$. Soit $\mathcal{L}(A)$ l'ensemble des ordres linéaires sur A. Une préférence du joueur $i \in N$ est $R^i \in \mathcal{L}(A)$. Un $S-$profil, $S = \{i_1, \ldots, i_s\}$ est un vecteur de préférences $(R^{i_1}, \ldots, R^{i_s})$ et un profil est un $N-$profil. Une règle de choix social est une fonction $f : \mathcal{L}(A)^N \longrightarrow \mathcal{L}(A)$. Si la distribution des pouvoirs découle d'une règle de choix social, alors la sélection des issues sociales est définie par une correspondance (de choix social) $H : \mathcal{L}(A)^N \longrightarrow \mathcal{P}(A)$.

Contrairement à la rationalité habituelle où chaque joueur optimise un gain selon une procédure d'optimisation d'un objectif, nous admettons que les coalitions cherchent un maximum de pouvoir et d'influence dans les décisions. Les pouvoirs dont les coalitions disposent leur permettent de bloquer les alternatives non préférées de ses membres dans un profil de préférences donné. C'est-à-dire que les pouvoirs et les préférences déterminent ensemble la formation des coalitions et les conflits en rapport aux décisions collectives.

6.3 Rationalité de la distribution des pouvoirs

Chaque joueur cherche une solution adéquate à son objectif de garantir une étendue aussi vaste que possible des limites de ses pouvoirs. Donc, la rationalité des joueurs inclut l'adaptation de leurs actions aux circonstances et la considération du mode de fonctionnement du système auquel il appartient. Par exemple, un comportement adéquat dans un système où tout le monde est opportuniste peut ne pas être adéquat dans un système où tout le monde est altruiste. Dans ce paragraphe, nous examinons la rationalisation de la distribution des pouvoirs aux coalitions par rapport aux différents paramètres comme la forme de la rationalité collective. La rationalité collective désigne un système référentiel de l'organisation par rapport auquel les actions et les pouvoirs des joueurs sont validés et justifiés. Au cours de nos discussions, nous étudions la rationalité collective par son procès de justification. A cet effet, nous distinguerons trois formes de rationalité collective. Premièrement, elle n'est que le reflet de ce qui doit être : collectivement accepté comme correct. Deuxièmement, la rationalité collective est une règle de jeu implicite qui joue le rôle de *main invisible et régulateur silencieux des actions* et dans le troisième cas, elle est une règle formelle sans aucune relation explicite avec les comportements ni les attentes des joueurs. Pour illustrer le premier cas, prenons l'exemple suivant :

Exemple 6.1 *Issue sociale en matière d'énergie utilisée*

Supposons une structure composée de la population d'une zone reculée, 1 et de deux ingénieurs, 2 et 3 ($N = \{1,2,3\}$), où 2 maîtrise l'énergie éolienne et 3 le solaire. L'état de l'énergie de cette zone est donc $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ où x_1 : utilisation des matières premières comme le bois, x_2 à forte proportion éolienne, x_3 : à forte proportion solaire et x_4 : à forte proportion éolienne et solaire. Donc, la distribution du pouvoir est donnée par $E(\{2\}) = E(\{3\}) = E(\{2,3\} = \{A\}$, $E(\{1\}) = \{x_1\}^+$, $E(\{1,2\}) = \{x_1\}^+ \cup \{x_2\}^+$, $E(\{1,3\}) = \{x_1\}^+ \cup \{x_3\}^+$, $E(N) = \mathcal{P}_0(A)$; $X^+ = \{Y \mid Y \supset X\}$. Rappelons que $E(S) = \{A\}$ signifie que S tout seul n'a aucun pouvoir de modifier l'état social. Ici, la rationalité de la répartition des pouvoirs est justifiée par la nature des choses : *ce qui est communément jugé comme nécessaire*. Si par exemple, $\{1,2\}$ se forme, donc 3 ne fera pas partie du projet, alors $\{x_3\}$ ne sera jamais l'issue du jeu.

En cas d'absence de cette nécessité, la rationalisation de la répartition des pouvoirs a besoin d'un référent admissible et accepté par les joueurs comme correct. Nous étudions dans la suite deux moyens offerts par la théorie des jeux pour rationaliser la répartition des pouvoirs. Le premier consiste à offrir des espaces d'actions aux joueurs. La répartition des pouvoirs qui en découle suit le mécanisme d'association naturelle des actions. Pour le second, les joueurs manifestent leurs préférences sur les alternatives discutées. Ces préférences, à leur tour, sont agrégées à l'aide d'une fonction mathématique, qui n'a aucune relation explicite avec le type des actions ni des relations de nécessité entre actions.

6.3.1 Rationalisation par des libres actions

Chaque joueur possède un espace de stratégies qui représente son champ d'actions. Le contenu, le nombre et la forme de ces actions peuvent découler de ses initiatives, de ses capacités, de sa réputation, de ses informations privées, de son héritage etc., mais peuvent également résulter du contenu de son contrat dans l'organisation. C'est-à-dire d'une attribution conventionnelle. Après avoir obtenu son espace de stratégies, chaque joueur détermine les limites de ses pouvoirs par l'association de son espace d'actions (le moyen) et de ses objectifs : plus de pouvoir et d'influence dans l'organisation. Ce mécanisme peut être débattu à travers les trois thèmes suivants

– la rationalité individuelle et la rationalité collective ;
– la norme et son interprétation et la rationalité des pouvoirs ;
– la maîtrise des actions et la rationalité des pouvoirs.

Thème 1. *Rationalité individuelle et rationalité collective*

La rationalité individuelle concerne la justification ou l'explication des actions prises par les joueurs ou les groupes de joueurs tandis que la rationalité collective concerne la représentation du fonctionnement de l'organisation par les joueurs. Cette représentation concerne notamment de l'idée faites par chacun sur les motivations et les tendances des autres ainsi que le comportement standard de tous les joueurs etc. Ainsi, la rationalité individuelle s'adapte à la rationalité collective car cette dernière détermine en partie la justification des pouvoirs. Pour illustration, considérons l'exemple suivant :

Exemple 6.2 *Un jeu à somme nulle*

Supposons une organisation composée de deux joueurs $\{1, 2\}$ telle que les espaces de stratégies sont $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \{a, b\}$ et dont la matrice du jeu est définie comme suit :

		Joueur 1	
		a	b
Joueur 2	a	$(1, 1)$	$(0, 2)$
	b	$(2, 0)$	$(1, 1)$

C'est-à-dire que la fonction de conséquence π est définie par $\pi(a, a) = \pi(b, b) = (1, 1)$, $\pi(a, b) = (2, 0)$, $\pi(b, a) = (0, 2)$; avec $(.\,,.)$ représente les gains de 1 et de 2 respectivement. Les états sociaux de cette organisation sont $\{x_1, x_2, x_3\}$ où $x_1 = (1,1)$, $x_2 = (0,2)$, $x_3 = (2,0)$. Si chaque joueur respecte la liberté de l'autre à choisir l'action comme il veut, alors aucun des deux n'a le pouvoir d'atteindre tout seul l'alternative x_2 ou x_3. En effet, chaque joueur a deux modes de garantie de pouvoir (Il est possible de formuler plusieurs types de garantie de pouvoir, mais nous discutons seulement ce qui paraissent plus plausibles. Ces types de garanties sont également discutés dans la théorie d'implémentation) :

1. *Type de garantie α*. Le joueur n'a pas le droit ou le moyen de garantir son pouvoir de bloquer un ensemble d'alternatives $A \setminus B$ sans qu'il n'ait le moyen de fixer une action pour laquelle, quelle que soit la réponse de ses adversaires, l'issue sociale est un élément de B ;

2. *Type de garantie β*. Le joueur a le moyen de bloquer les alternatives dans $A \setminus B$ pourvu qu'il arrive à trouver des actions permettant de répondre aux actions de son adversaire pour que les conséquences de leurs actions conjointes restent un élément de B.

Maintenant, supposons que les deux joueurs ont un même type de garantie de pouvoir : (a) où la distribution de pouvoir est notée E_α ; ou (b) dans lequel la distribution de pouvoir est notée E_β. Dans le premier cas, la répartition des pouvoirs de l'exemple 6.2 est donnée par $E_\alpha(\{1\}) = E_\alpha(\{2\}) = \{x_1, x_2\}^+ \cup \{x_1, x_3\}^+$ et $E_\alpha(\{1,2\}) = \mathcal{P}_0(A)$. C'est-à-dire que le joueur 1 (ou 2) a le moyen stratégique de bloquer x_2 ou x_3 mais n'a aucune possibilité de bloquer x_1. Dans le deuxième cas, la répartition des pouvoirs aux travers des coalitions est $E_\beta(\{1\}) = E_\beta(\{2\}) = \{x_1\}^+ \cup \{x_2, x_3\}^+$, $E_\beta(\{1,2\}) = \mathcal{P}_0(A)$. Donc, en particulier, chaque joueur a le pouvoir de forcer l'issue $(1,1)$.

La rationalité individuelle intervient donc sur deux niveaux. D'un côté il y a la détermination du type de garantie des pouvoirs et de l'autre côté, il y a le choix des stratégies adoptées.

- Au premier niveau, la rationalité individuelle prend la forme de l'arbitrage entre la certitude du pouvoir (α) et l'étendue du pouvoir (β) alors que la rationalité collective s'exprime par une convention implicite ou explicite à savoir si les joueurs vont jouer ensemble selon le même type ou différents types de garantie de pouvoir. C'est-à-dire sur le pourquoi et le comment de cette différence. Avec l'exemple 6.2, supposons que 1 joue selon α et que 2 joue selon β. Alors, 1 ne peut pas dire, "*nous allons gagner chacun* 1", mais il a seulement le moyen d'éviter $(0,2)$ en prenant l'action a. Par contre, 2 peut déclarer que : "*quoi que* 1 *fasse, l'issue du jeu sera* $(1,1)$". La rationalité collective intervient dans cet exemple sur la *crédibilité* des pouvoirs. Par exemple, si 1 adopte la garantie α alors que 2 adopte la garantie β, alors les pouvoirs de 2 dépassent ceux de 1 sachant qu'ils partent d'un jeu symétrique. Ici, cette acceptation ou crédibilité peut être soutenue par les tactiques et la souplesse de la stratégie de 2 : la stratégie de meilleure réponse à une situation donnée.

- Au second niveau, la rationalité individuelle s'éprouve par le choix des actions adaptées à la rationalité du premier niveau. Dans l'exemple 6.2, si tous les deux jouent selon le type de garantie α, alors en prenant l'action

a, le joueur 1 est effectif pour $\{x_1, x_2\}$ et en prenant l'action b, il est effectif pour $\{x_1, x_3\}$.

Thème 2. *Norme - interprétation et la rationalité des pouvoirs*

Supposons une organisation où il y a un référent normatif sur lequel repose l'effectivité des pouvoirs des coalitions. Le référent peut être un système culturel incluant habitudes et croyances collectives, un système juridique incluant les lois et ses modes d'application, des intérêts communs ou des faits à caractère transcendant. Par exemple, les miracles de Lourdes, de Fatima et d'autres ont une influence sur les limites des pouvoirs des clergés et associations religieuses dans l'organisation regroupant les croyants catholiques. L'interprétation du référent (un mode de mise en relation du référent aux stratégies) a des influences aussi bien sur les comportements des coalitions que sur la délimitation de l'ensemble des stratégies adoptées par les joueurs.

Nous discutons dans ce modèle le cas où la rationalité collective admet la pluralité des interprétations de la norme (ou du référent normatif) : plusieurs interprétations sont communément acceptées par les parties prenantes comme plausibles. Il est donc exclu de considérer les systèmes totalitaires où il n'y a qu'un seul référent et une seule interprétation. Formellement, étant donné un système de norme, l'ensemble des interprétations correctes donne à chaque joueur $i \in N$ l'ensemble d'actions conformes ou permises Σ_i. Comme un joueur ou une coalition ne peut pas adopter simultanément toutes les interprétations plausibles, ou risque de nuire à la crédibilité de ses actions, donc à la perte de pouvoir, alors une interprétation λ restreint l'ensemble des actions de $i \in N$ en $\Sigma_i^\lambda \subset \Sigma_i$. L'ensemble des états sociaux est donc formé par $\left\{\pi(\sigma_1^{\lambda(1)}, \ldots, \sigma_n^{\lambda(n)}) \mid \sigma_i^{\lambda(i)} \in \Sigma_i^{\lambda(i)}, i \in N\right\}$. Ainsi, dans l'interprétation λ, les conséquences des actions des joueurs sont regroupés dans A_λ et l'ensemble de tous les états sociaux possibles est :

$$A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

Si une coalition S garantit son pouvoir de manière β où ses membres s'accordent sur l'interprétation de la norme $\lambda \in \Lambda$, alors les pouvoirs de S sont décrits par :

$$E_\beta^\lambda(S) \subset \mathcal{P}_0(A_\lambda)$$

Ici, la rationalité du joueur peut se manifester sur le choix de son interprétation de la norme. Une interprétation étroite et très restrictive risque de nuire à l'étendue de ses pouvoirs. Pourtant, une interprétation comptant le maximum d'actions et garantissant le maximum de pouvoir peut ne pas exister, soit par des restrictions imposées par des convictions éthiques, morales, religieuses ou autres, soit du fait de la non validation par la rationalité collective des interprétations inter-temporellement divergentes. Par exemple, si une coalition S justifie ses actions dans une interprétation λ, elle risque de ne plus être crédible dans l'avenir avec une interprétation λ', communément perçue incompatible avec λ. Ce problème conduit certains auteurs à mettre en avant l'idée selon laquelle l'ambiguïté sur l'interprétation (ou classification) des actions est un moyen pour assurer la pérennité, donc l'étendue du pouvoir. Nous admettons ici que le pouvoir est une structure capitalisable. Un pouvoir acquis peut servir de base pour une nouvelle conquête de pouvoir.

La pluralité de l'interprétation de la norme est également l'origine du problème de détermination des limites des pouvoirs des coalitions et du problème de migration des pouvoirs. Chaque coalition a la possibilité de choisir l'interprétation adaptée à ses objectifs. Donc, il se peut que certains joueurs n'aient pas les informations sur l'interprétation adoptée par les autres, ce qui les rend incapables de déterminer quelles sont les limites des pouvoirs utilisables. Considérons, par exemple, deux interprétations λ_1 et λ_2 qui ne sont pas mutuellement exclusives, donc chaque coalition peut utiliser l'une ou l'autre à tout moment. Dans ce cas, chaque coalition a au moins deux contours de pouvoirs décrits par $E_\beta^{\lambda_1}(S)$ et $E_\beta^{\lambda_2}(S)$. Par conséquent, si $E_\beta^{\lambda_1}(S) \nsubseteq E_\beta^{\lambda_2}(S)$ et $E_\beta^{\lambda_2}(S) \nsubseteq E_\beta^{\lambda_1}(S)$, alors il est difficile de prévoir si S répond aux actions des autres avec l'interprétation λ_1 ou λ_2. Ce phénomène peut se produire dans le cas de l'évolution des interprétations. Si, par exemple, l'interprétation dominante à un moment donné est λ_1, et celle à un autre moment est $\lambda_2 \neq \lambda_1$, alors les pouvoirs partent de E_{λ_1} vers E_{λ_2}. Pour illustration, considérons l'exemple suivant :

Exemple 6.3 *Interprétations des notions "mariage" et "famille".*

Pour simplifier, supposons qu'il y seulement deux interprétations λ_1, λ_2. Supposons également que la différence entre ces deux interprétations a seulement des conséquences sur l'ensemble de personnes qui puissent bénéficier les droits et devoirs relatifs à la famille famille et aux mariés. C'est-à-dire que les droits et devoirs des mariés et d'une famille sont les mêmes dans les deux interpretations et que les autres paramètres comme l'âge, l'origine ethnique etc n'interviennent pas. Ainsi, admettons comme correctes les deux interprétations suivantes :

L'interprétation λ_1 : le mariage concerne exclusivement le contrat d'union entre une femme et un homme, et une famille est un ensemble de personnes qui naissent de l'union ou admis par adoption du couple qui a contracté le mariage.

L'interprétation λ_2 : une famille est un ensemble de personnes qui vivent sous un même toit et partagent des biens communs. Le mariage est un contrat entre deux personnes (ou plusieurs) qui aspirent à fonder une famille.

Dans λ_1, la définition repose sur le concept de mariage et s'en suit la notion de famille, et dans λ_2, c'est l'inverse.

Par exemple, λ_1 est l'interprétation dominante et exclusive pendant des siècles dans le monde chrétien ou d'autres systèmes normatifs monogames. Pourtant, de nos jours, elle se déplace vers λ_2. Ce déplacement de l'interprétation a donc des conséquence sur les limites de pouvoirs des différents groupes de personnes selon ses tendances. Par exemple, un couple de messieurs peut avoir le droit qu'il n'aurait pas eu dans λ_1.

Thème 3. *La maîtrise des actions et la rationalité des pouvoirs.*

Maintenant, supposons que pour atteindre une certaine position en terme de pouvoir, chaque joueur doit résoudre q types de problèmes. Par exemple, si l'organisation en question a pour objectif de répondre aux besoins quotidiens de ses membres comme une collectivité territoriale, les types de problèmes que chaque joueur doit prendre en compte sont : les produits financiers de son portefeuille, sa vie spirituelle, ses idées sur la liberté, sa participation à la vie publique et politique, sa santé, sa vie familiale, l'envie de connaître etc. Chaque type de problème, indexé par $k = 1 \ldots q$, lui donne un ensemble d'actions Σ_i^k. Donc, l'espace de stratégies de $i \in N$:

$$\Sigma_i = \prod_{l=1}^{q} \Sigma_i^q$$

Ainsi, une coalition S a le pouvoir, selon le type de garantie α, de bloquer une alternative $x \in A$ s'il existe $(\sigma_S^1, \ldots, \sigma_S^q) \in \prod_{k=1}^q \prod_{i \in S} \Sigma_i^k$ tel que pour tout $(\sigma_{N \setminus S}^1, \ldots, \sigma_{N \setminus S}^q) \in \prod_{k=1}^q \prod_{i \in N \setminus S} \Sigma_i^k$, $\pi(\sigma^1, \ldots, \sigma^q) \neq x$. Rappelons que la logique du pouvoir selon une fonction d'effectivité s'inscrit dans le tiers exclu : "bloquer un ensemble d'alternatives" est le contraire de "capable de forcer la réalisation d'une alternatives de son complémentaire".

Dans une organisation où le problème à résoudre inclut toutes les dimensions de la vie de ses membres (par exemple, l'État ou une association à caractère humanitaire), alors la taille de l'information et donc la résolution de l'adéquation des objectifs aux moyens peuvent être très complexe. En effet, si les stratégies dans Σ^k sont trop sophistiquées, comme par exemple les produits financiers où des joueurs risquent de ne pas pouvoir résoudre les énigmes derrière les caractéristiques des produits, ou n'ont pas le temps de familiariser avec ces produits pour acquérir les tactiques et astuces adéquates, alors les limites des pouvoirs des coalitions différeraient de la structure théorique prévue. Ainsi, le problème de contraste entre le pouvoir formel et le pouvoir réel apparaît comme une conséquence naturelle de cette situation. Un écart entre les pouvoirs effectifs ou réels et les pouvoirs théoriques engendre plusieurs problèmes en matière de gouvernance : générer le sentiment d'injustice sur la distribution des pouvoirs, donner naissance au problème de justification du pouvoir formel et nuit à l'autorité réelle des acteurs etc. Notons que le manque d'adhésion des membres sur la répartition formelle de pouvoir conduirait à l'organisation dans la logique de guerre : le consentement sur les limites des pouvoirs n'est obtenu que par l'anéantissement ou par la privation des moyens de l'adversaire.

Formellement, supposons que les informations à la hauteur de la résolution de $i \in N$, $\Sigma_i^{k,\theta}$ est un sous ensemble de Σ_i^k. Alors, pour $\tau \in \{\alpha, \beta\}$,

$$\forall S \in \mathcal{P}_0(N) : \prod_{k=1}^{q} \prod_{i \in S} \Sigma_i^{k,\theta} \subset \prod_{k=1}^{q} \prod_{i \in S} \Sigma_i^{k,\theta'} \Rightarrow E_\tau^\theta(S) \subset E_\tau^{\theta'}(S), \tag{6.1}$$

où $E_\tau^\theta(S)$ sont les pouvoirs de S sachant que son espace de stratégies est $\prod_{k=1}^q \prod_{i \in S} \Sigma_i^{k,\theta}$. De l'équation 6.1, si q croît ou le degré de complexité des stratégies augmente, alors certains joueurs risquent de voir leur espace de stratégie réduit à un singleton, et il en résulte un pouvoir réduit. Remarquons que la croissance du nombre de type de problèmes q, ou l'augmentation du niveau de complexité des actions dans Σ_S^k, $S \subset N$ peut servir d'instrument d'exclusion de certains joueurs. Si S est une classe de joueurs cible, alors on intègre dans l'espace de stratégies de S, via les lois ou d'autres instruments, des actions qui n'ont pas de relation essentielle avec ses objectifs et qui ne sont pas nécessaires pour l'organisation. La complexité de l'espace de stratégie ainsi obtenu induira des pertes de pouvoirs pour la coalition S.

En termes de rationalité, on rencontre un problème plus radical que l'opposition entre la rationalité absolue et la rationalité procédurale ou simonienne. Il n'est pas non plus une simple question de *compatibilité*. Pour une grande partie des joueurs, la recherche d'une solution adéquate à ses objectifs s'avère impossible. Ainsi, une distribution de pouvoir peut être collectivement rationnelle tout en mettant à l'écart une partie des joueurs.

6.3.2 Rationalisation institutionnelle

Nous venons de montrer que la complexité des actions peut favoriser la défaillance du mécanisme de répartition des pouvoirs entre les parties prenantes de l'organisation. Pour résoudre en partie ce problème, on peut procéder par la simplification des actions sans modifier l'ensemble des états sociaux atteignables ni la répartition des pouvoirs.

Exemple 6.4 *La bataille de sexe*

Un couple est confronté à un problème de choix collectif qui consiste à déterminer s'ils vont ensemble au théâtre ou au foot. En cas de non solution, ils risquent de partir séparément. Les états sociaux du problème sont x_1 : *ensemble au foot*, x_2 : *ensemble au théâtre*, x_3 : *monsieur au foot et madame au théâtre*, x_4 : *madame au foot et monsieur au théâtre*. Si chaque joueur doit prendre une action *foot (f)* ou *théâtre (t)* pour déterminer l'issue sociale. Le jeu associé est une forme de jeu, consigné dans le tableau suivant :

		Monsieur	
		f	t
Madame	f	x_1	x_4
	t	x_3	x_2

Maintenant, supposons qu'au lieu de se partager sur les actions, on demande au deux joueurs de manifester leurs préférences sur les alternatives et on se donne une règle de sélection f qui transforme ces préférences en une seule préférence. Si les préférences sont

x_1	x_2
x_3	x_1
x_2	x_3
x_4	x_4
Madame	Monsieur

et f = somme des rangs : $x_k\ f(R)\ x_l \Leftrightarrow \text{rang}_{\text{madame}}(x_k) + \text{rang}_{\text{monsieur}}(x_k) \geq \text{rang}_{\text{madame}}(x_l) + \text{rang}_{\text{monsieur}}(x_l)$, alors x_1 sera retenue. Ici, le caractère objectif et transcendant de f peut contribuer à la crédibilité des pouvoirs. Toutefois, si cette règle vient de l'un des joueurs, étant donné qu'aucune règle n'est manipulable, les joueurs restants risquent de contester les pouvoirs ainsi définis. En outre, la réduction des actions en manifestation de préférences sans nuire à la nature du jeu et à la structure de pouvoir ne concerne que des classes particulières de jeux.

Par rapport au problème de rationalisation des pouvoirs, nous allons montrer comment définir une distribution de pouvoir à partir d'une règle de choix social f. La méthode que nous y présentons permet également de répondre à la question inverse : *comment définir la règle de choix social pour aboutir à une structure de pouvoir ciblée* ? Pour ce, nous pouvons reconsidérer l'exemple 5.2 du chapitre 5.

En matière de répartition de pouvoir, les joueurs ont deux possibilités pour jouer une règle de choix social :

- Premièrement, les joueurs agissent de manière spontanée et isolée et ne font que manifester leurs préférences sur les alternatives. Dans ce cas, les pouvoirs des coalitions résultent du mécanisme naturel de la règle, tel qu'un ensemble de joueurs composé de la moitié plus un des joueurs peut faire passer toute décision dans le cas de vote à majorité simple.

- Deuxièmement, les joueurs coordonnent leurs préférences et incorporent dans leurs actions le mode de validation des pouvoirs par son organisation. Dans le cas de l'exemple 5.2, si la rationalité collective ne donne de crédibilité qu'aux pouvoirs de type de garantie α, alors le groupement des joueurs par les préférences doit suivre la distribution des pouvoirs selon E^H_α. Ici encore, l'absence de règle explicite sur le type de garantie validé par la rationalité collective offre une pluralité de type de garantie de pouvoir. Du point de vue de la logique, ce problème est similaire à l'existence de pluralité d'interprétations d'une norme ; d'où le problème de l'ambiguïté sur les limites des pouvoirs des coalitions.

6.4 Rationalité de l'usage du pouvoir

Chaque coalition a le droit et non l'obligation d'exercer ses pouvoirs décrits par une ou des fonctions d'effectivité associée à l'organisation. L'usage de la notion de droit et obligation ne fait aucune référence à un système juridique. Ils expriment l'existence de justification endogène d'une chose. La rationalité de l'usage de pouvoir est une procédure cohérente par laquelle chaque coalition exerce son objection contre telle ou telle alternative. La cohérence concerne les préférences : si x_k est préféré à x_{k+1}, $k = 1 \ldots r$ alors aucun x_l n'est pas préféré à x_k pour $l < k$; et le modèle de comportement : si un joueur agit de manière probabiliste, alors il en restera de même pendant le jeu. La cohérence concerne également les interprétations choisies pour motiver une action en groupe, et le mode de garantie de pouvoir.

L'objection d'une coalition S contre une alternative x dans un profil R^N est une proposition par S d'un ensemble B, tel que $B \in E(S)$ et $x \notin B$.

En effet, proposer B peut se concrétiser par des arguments (juridiques, scientifiques, religieux etc.) pour des alternatives dans B ou contre l'alternative x. Cela peut se manifester également par une capacité militaire et assimilée, ou tout simplement par une force physique ou une compétence technique comme le cas de l'exemple 6.1. Pouvoir réaliser B offre aux membres de S un outil de négociation car cela constitue une menace réelle aux yeux de $N \setminus S$ que S a le pouvoir de basculer la situation x vers un élément de B. Donc, la rationalisation de l'exercice de pouvoir est une quête de réponse à la question : *pourquoi et comment se fait-il que la coalition S oppose à x avec B mais non avec un autre B', $B' \in E(S), x \notin B'$?*.

Dans les deux exemples 6.5 et 6.6 qui suivent, nous montrerons les relations entre le choix des ensembles de blocage et le profil de préférences des joueurs.

Exemple 6.5 *Soient $N = \{1,2\}$, $A = \{x_1, x_2\}$ et E la fonction d'effectivité définie par :* $E(\{i\}) = \{x_i\}^+$, $i = 1,2 \mod 2$

Dans le profil de préférence R^N suivant, aucune tentative d'opposition n'est manifestée.

$$\begin{array}{cc} x_2 & x_1 \\ x_1 & x_2 \\ R^1 & R^2 \end{array}$$

Si l'état social est x_1, 2 n'a aucune raison pour changer le *statu quo*. Donc, une " non action " de 2 est un comportement correct ou rationnel. Par contre, le joueur 1 a le pouvoir d'opposer contre x_2 mais non contre x_1. Comme l'opposition de 1 contre x_2 n'a aucun sens, alors la non action est la forme la plus achevée de la rationalité du joueur 1.

Exemple 6.6 *Soient $N = \{1,2,3\}$, $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ et E la fonction d'effectivité définie par :* $E(\{i\}) = \{x_{i+1}, x_{i+2}\}^+$, $i = 1,2,3 \mod 3$, $E(\{i,j\}) = \{x_k\}^+ , i \neq j \neq k$

Supposons qu'on est dans le profil R^N suivant :

$$\begin{array}{ccc} x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ R^1 & R^2 & R^3 \end{array}$$

Supposons que le *statu quo* soit x_1. Les pouvoirs qui pourraient agir contre x_1 sont : (a) l'opposition de 1 via $\{x_2, x_3\}$ (b) l'opposition de $\{1,3\}$ via x_2. Dans (a), 1 peut encore espérer que x_3, sa meilleure alternative, sera l'issue sociale à la suite de son opposition tandis que dans (b), il est certain que x_2 sera l'issue à la place de x_1, sinon 3 n'accepte pas d'agir avec lui. Toutefois, dans (b), 1 provoque 2 pour l'engager à proposer x_3 avec lui. Cette dernière action repose sur des croyances de 1, car il est possible que 2 anticipe cette manipulation et propose à 3 de garder ensemble x_1, la pire alternative de 1. Ainsi, nous discutons trois formes de rationalité de l'usage du pouvoir : l'usage pour éviter le pire, l'usage basé sur une croyance et l'usage basé sur un objectif visé, donc plus stratégique. Plus formellement, nous identifions au moins quatre types de motivation qui seront étudiés dans les quatres thèmes : usage du pouvoir pour éviter le pire, l'usage du pouvoir selon l'état des croyances, usage stratégique du pouvoir pour des objectifs visés et l'usage du pouvoir pour le dialogue.

Thème 1. *Usage du pouvoir pour éviter le pire.*

L'usage du pouvoir pour éviter le pire consiste à dire qu'une coalition S fera une objection contre l'alternative $x \in A$ via un ensemble B dans le profil $R^N \in \mathcal{L}(A)^N$ si et seulement si

$$\forall i \in S,\ \forall y \in B;\ \ y\ R^i\ x \tag{6.2}$$

Si B n'est pas un singleton, alors $B \in E(S)$ assure que la coalition S a le moyen de bloquer toutes les alternatives en dehors de B mais n'a pas le pouvoir de forcer la réalisation d'une alternative dans B. Donc, la proposition de B contre x ne donne aucune idée aux membres de S sur l'alternative qui sera retenue à l'issue de son objection. L'équation 6.2 exprime que face à cette incertitude, les membres de S anticipent le pire et exécutent leur pouvoir sans que tous les états sociaux dans B soient meilleurs que x.

Thème 2. *Usage du pouvoir selon l'état des croyances.*

La prudence collective des membres de S leur oblige à n'engager aucune objection sans la garantie sécurisante de l'équation 6.2. Cette attitude n'est pas la seule possibilité pour motiver une action. Pour simplifier, admettons que les sont choses égales par ailleurs. Soit alors S une coalition effective pour B. Pour exécuter son pouvoir de bloquer une alternative $x \notin B$, chaque joueur $i \in S$ se donne une probabilité sur B, disons p^i_B, et l'action est engagée pourvue que

$$\forall i \in S,\ \sum_{y \in B} u^i(y) p^i_B(b) = E(u^i(B)) > u^i(x) \tag{6.3}$$

avec $u^i(x)$ représente le rang de x dans la préférence R^i. Malgré ces opérations arithmétiques, nous restons toujours dans le cas des préférences ordinales, mais la différence entre les ordres est considéré comme un nombre. Dans ce cas, il est possible que pour un $i \in S$, et pour un $z \in B$ $u^i(z) < u^i(x)$ mais dans l'espoir de la réalisation d'un $y \in B$ tel que $u^i(y) > u^i(x)$, i engage son action avec S. Implicitement, les ordres sur les alternatives sont des quantités mais nous n'avons pas besoin de supposer que les préférences sont cardinales.

Pour illustrer la pertinence de ce comportement, prenons l'exemple suivant :

Exemple 6.7 *Soit $N = \{1,2,3\}$ un comité de conseil chargé de proposer au gouvernement le choix de la politique énergétique*

Supposons que trois alternatives sont discutées ; $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ où x_1 désigne l'alternative à prédominance énergies renouvelables et assimilées, x_2 une tendance vers les énergies fossiles et assimilées et x_3 donne faveur aux énergies nucléaires et assimilées. Le comité d'experts N est chargé de proposer au gouvernement une alternative. Supposons que la répartition des pouvoirs est définie comme suit : $E(N) = \mathcal{P}_0(A)$, $E(\{1,2\}) =$

$\{x_2, x_3\}^+$, $E(\{2,3\}) = \{x_3, x_1\}^+$, $E(\{3,1\}) = \{x_1, x_2\}^+$ et $E(\{i\}) = \{A\}, \forall i \in N$. Supposons en outre que si le comité laisse une ambiguïté au gouvernement entre x_1 et x_2, i.e il propose $\{x_1, x_2\}$, alors ce dernier prendra x_1 avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et x_2 avec la probabilité $\frac{1}{3}$. Pour $\{x_2, x_3\}$, ces probabilités valent $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$, et pour $\{x_1, x_3\}$ elles sont $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$. Entre $\{x_1, x_2, x_3\}$, les probabilités sont $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{8}$. Nous admettons en outre que les croyances ou les distributions de probabilité sont les mêmes pour tous les joueurs.

Supposons que le *statu quo* est x_1 [1]. Donc les pouvoirs qui pourraient faire une objection contre le statu quo sont : $(N, \{x_2\})$, $(N, \{x_3\})$ et $(\{1,2\}, \{x_2, x_3\})$. Dans les deux premiers cas, l'état social à l'issue de l'objection est $\{x_2\}$ ou $\{x_3\}$. Dans le troisième cas, la proposition du comité au gouvernement est $\{x_2, x_3\}$ (x_2 ou x_3). Donc, c'est au gouvernement de choisir l'issue finale du jeu. Ainsi, il est raisonnable que la coalition $\{1, 2\}$ engage une objection contre x_1 pourvu que

$$\forall i \in \{1,2\}\,; \quad E(u^i(\{x_2, x_3\})) > u^i(x_1)$$

Thème 3. *Usage stratégique du pouvoir pour des objectifs visés.*

Reprenons l'exemple 6.6 et supposons que le *statu quo* est x_1, et supposons que chaque joueur a l'objectif d'atteindre sa meilleure alternative. Admettons que les trois joueurs se trouvent dans le profil décrit dans l'exemple 6.6, donc 2 n'a aucun intérêt à bousculer les choses.

Actions de 1. L'objectif du joueur 1 : changer x_1 en x_3 ou au moins en x_2. Pour ce, il a deux possibilités : (a) agir seul contre x_1 via $\{x_2, x_3\}$ (b) agir ensemble avec 3 via $\{x_2\}$. Dans le cas (a), 1 n'a aucun pouvoir de forcer l'une des alternatives de $\{x_2, x_3\}$. En agissant ainsi, le joueur 1 sait qu'il risque de déclencher une coopération entre 2 et 3 [2] pour défendre x_1, sa pire alternative. Dans le cas (b), la coalition $\{1, 3\}$ se forme pour proposer x_2. Cette action incite 2 à faire coopération avec 1 pour proposer x_3, sa meilleure alternative. S'il accepte cette proposition, il mettra le joueur 3 en situation défavorable et provoque la coopération $\{2, 3\}$ pour défendre x_1. Donc, 1 n'a aucun intérêt à agir avec 2 pour atteindre x_3. Ainsi, l'action rationnelle de 1 pour atteindre son objectif consiste à coopérer avec 3 en proposant x_2.

Actions de 3. En agissant avant ou après 1, le joueur 3 n'a d'autre moyen d'améliorer sa situation que par la coopération avec 1, en proposant x_2, ce qui coïncide avec la rationalité stratégique de 1.

Thème 4. *Usage du pouvoir par le dialogue.*

Un dialogue au point x est un processus d'échange d'arguments pour bloquer ou maintenir l'alternative $x \in A$. Le dialogue se passe seulement entre les coalitions qui ont le pouvoir de bloquer x. Le dialogue

1. on suppose que le changement n'a aucun coût, donc on change le statu quo lorsqu'il y a une objection contre cet état social.

2. Ces deux joueurs ne savent pas si c'est x_2 ou x_3 qui va être l'issue du jeu à la suite de l'objection de 1. Cette situation met en doute aussi bien le joueur 2 que le joueur 3. Le joueur 3 anticipe le pire avec la réalisation de x_3 et 2 en fait de même avec x_2. D'où une nécessité de coopération entre ces deux joueurs.

social est donc l'ensemble des dialogues en tout point $x \in A$. Supposons $(S_h, B_h)_{h \in H(x)}$ la liste des coalitions et des ensembles d'alternatives tels que S_h a pouvoir de bloquer x via B_h. Donc, $(S_h)_{h \in H(x)}$ sont les seules coalitions qui participeront au dialogue au point x.

Première forme de dialogue : une chaîne d'oppositions. Supposons que S_{h_1} s'oppose à x_1 via B_{h_1}, donc $\forall i \in S_{h_1}, \forall y \in B_{h_1},\ y\ R^i\ x$. Une paire $(S_{h_p}, B_{h_p}),\ h_p \in H(x)$ est une objection à $(x, S_{h_1}, B_{h_1}, \ldots, S_{h_{p-1}}, B_{h_{p-1}})$ si

$$\begin{array}{ll} \forall i \in S_{h_p} \cap S_{h_{p-1}}, \forall y \in B_{h_{p-1}}, \exists z \in B_{h_p} & : z\ R^i\ y \\ \forall i \in S_{h_p} \setminus S_{h_{p-1}}, \forall z \in B_{h_p} & : z\ R^i\ x \end{array}$$

La liste $(x, S_{h_1}, B_{h_1}, \ldots, S_{h_p}, B_{h_p})$ est une chaîne si pour tout $q = 1 \ldots p$, (S_{h_q}, B_{h_q}) est une objection à $(x, S_{h_1}, B_{h_1}, \ldots, S_{h_{q-1}}, B_{h_{q-1}})$. Une objection $(S_h, B_h), h \in H(x)$ est valide contre la chaîne $(x, S_{h_1}, B_{h_1}, \ldots, S_{h_p}, B_{h_p})$ si aucune paire $(S_{h'}, B_{h'})$ et une objection contre $(x, S_{h_1}, B_{h_1}, \ldots, S_{h_p}, B_{h_p}, S_h, B_h)$.

S'il existe une chaîne qui n'admet aucune objection valide, alors le dialogue se termine par le maintient de x, dans le cas contraire, il se termine par l'élimination de x. Cette définition fait référence à la définition de l'ensemble du marchandage de (19).

Deuxième forme de dialogue : objection-contre-objection.

Supposons que S_{h_1} s'oppose à x_1 via B_{h_1}, donc $\forall i \in S_{h_1}, \forall y \in B_{h_1},\ y\ R^i\ x$. Une contre-objection contre (S_{h_1}, B_{h_1}) est une paire $(S_{h_2}, B_{h_2}),\ h_2 \in H(x)$ tel que

$$\begin{array}{ll} \forall i \in S_{h_2} \cap S_{h_1}, \forall y \in B_{h_1}, \exists z \in B_{h_2} & : z\ R^i\ y \\ \forall i \in S_{h_2} \setminus S_{h_1}, \forall z \in B_{h_2} & : z\ R^i\ x \end{array}$$

Si toute objection admet une contre-objection, alors le dialogue se termine en gardant x, dans le cas contraire x est éliminé. Cette définition fait référence à la définition de l'ensemble du marchandage de Mas-Colell (28).

Ainsi, chaque coalition a plusieurs raisons pour engager une objection ou un dialogue sur l'issue du jeu. Donc, il y une multiplicité de la rationalisation des pouvoirs au niveau de sa répartition au travers des coalitions et au niveau de son usage par les coalitions. Cette multiplicité entraîne nécessairement une indétermination sur les limites des pouvoirs des coalitions, ce qui peut avoir des conséquences positives et négatives sur le mécanisme du pouvoir. Elle a des conséquences positives si elle contribue à la régulation de l'organisation car la non clarté des limites des pouvoirs affaiblie la capacité d'objection des coalitions : elles sont incapables de mesurer exactement leurs pouvoirs et les pouvoirs des autres. Elle a des conséquences négatives car elle laisse passer des arbitraires dans le mécanisme d'objection et de dialogue basé sur les pouvoirs. Cette zone d'incertitude risque de conduire à une confusion où l'on accorde une crédibilité à des coalitions qui n'ont pas la capacité de leurs intentions. Cela risquerait aussi de minimiser à tort la capacité d'autres joueurs qui ont le moyen effectif pour leurs objectifs. Donc, pour mieux contrôler le pouvoir, il faut qu'il y ait des clarifications sur les formes de rationalité derrière les actions des coalitions. Pourtant, une solution moins coûteuse en matière de collecte d'informations sur les formes de rationalité et de la résolution du problème de contrôle de pouvoir en intégrant tous les types de garantie possibles est envisageable. Tel est l'objet du paragraphe suivant.

6.5 Régulation des pouvoirs

La régulation des pouvoirs est une opération qui consiste à attribuer à la distribution des pouvoirs des propriétés perçues comme convenables. Par exemple, une opération qui consiste à gérer la répartition du pouvoir pour qu'elle n'expose pas les joueurs aux conflits (stabilité), ou qu'elle permette aux joueurs de participer pleinement aux décisions [3] etc. Quand au mobile de la régulation, il peut être expliqué par le respect des principes moraux, religieux, éthiques ou autres, mais peut provenir également d'une simple analyse des nécessités des choix collectifs. Le mécanisme naturel *laisser libre et laisser faire* peut avoir des propriétés convenables, mais il est possible qu'on doive agir de manière exogène pour que ces propriétés soient inhérentes au mécanisme. Dans ce qui suit, il s'agit des régulations pour parvenir à la stabilité.

Les conditions de stabilité dépendent de la forme de rationalité de l'usage du pouvoir des joueurs. Par exemple, dans le cas de l'usage "pour éviter le pire", la propriété de "l'union fait la force" [4] contribue à supprimer certaines formes de conflits. Aucun travail formel n'a été fait pour les usages "selon les croyances" et "stratégique selon des objectifs visés", et pour l'usage par le dialogue, les travaux de H. Keiding & D. Razafimahatolotra ont montré par exemple que pour un dialogue se déroulant selon les définitions de marchandage de Zhou L. (66), la stabilité "selon le dialogue" est équivalente à la stabilité "pour éviter le pire" dans le cas des jeux simples où une coalition est effective pour tout ou pour rien. Les trois thèmes suivants suggèrent des moyens qui consistent à intervenir sur les actions des joueurs au lieu d'agir directement sur la structure de pouvoir.

Thème 1. *Régulation par restriction.*

La forme la plus naturelle et primitive de la régulation consiste à supprimer certaines actions, via des lois ou des éléments exogènes au choix collectif comme les armes. Dans le cas extrême, la forme la plus archaïque de la régulation se manifeste par la suppression totale des actions des acteurs jugés cause de l'irrégularité de l'organisation.

Thème 2. *Régulation par protection ou accompagnement.*

Au lieu de supprimer les actions des joueurs relativement forts dans l'organisation, ce procédé consiste à accompagner les acteurs qui risquent de ne pas pouvoir résoudre l'équation de leur action pour maintenir leur

3. Ce principe correspond au principe de "Minimal Liberalism" de Sen, défini par B. Peleg en fonction d'effectivité comme suit : $\exists i \neq j \in N$ et $B_i \in E(\{i\})$, $B_j \in E(\{j\})$ tels que $B_i \neq A \neq B_j$.

4. $\forall S_1, S_2 \in \mathcal{P}_0(N), B_k \in E(S_k)$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ implique $B_1 \cap B_2 \in E(S_1 \cup S_2)$. En particulier $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$.

pouvoir. Cette opération peut se faire également par la création d'institution qui assure l'apprentissage.

Thème 3. *Régulation par la simplification des formes d'actions.*

Comme nous avions montré au thème 3, la quantité d'informations que chaque joueur doit prendre en compte peut engender des effets néfastes sur la structure de pouvoir. Si l'objectif des joueurs consiste à *maintenir leurs pouvoirs* et non de *posséder un grand nombre d'actions*, alors la régulation peut se faire par une opération de simplification, en quantité et en complexité, des actions. La mise en place d'une règle de choix social est un outil pour cet objectif. En effet, il suffit que les joueurs manifestent leurs préférences et la fonction de choix social, qui est informatisable, résout le reste. Toutefois, cette pratique peut rétrécir l'ensemble des issues sociales atteignables : dans le pouvoir déduit d'un mécanisme, l'ensemble des états sociaux est très ouvert alors que dans une règle de choix social, il est *figé à priori*. Le cas extrême pour ce procédé consiste à fixer les pouvoirs des coalitions. Dans ce cas, les joueurs ne résolvent plus l'équation liant leurs actions aux conséquences et ne doivent plus prendre le temps de choisir une relation d'ordre sur l'ensemble des alternatives, mais ils exécutent seulement les ordres qui déterminent les limites des leurs pouvoirs.

6.6 Conclusion

La fonction d'effectivité est un outil à la fois théorique et calculatoire permettant de décrire et de prévoir des phénomènes liés au mécanisme du pouvoir. Il y a eu cependant trop peu de travail dans le domaine pour pouvoir en tirer un système de théorie du pouvoir. Par exemple, aucun travail n'a tenté de résoudre les conditions de stabilité selon une rationalité stratégique, qui est déjà étudiée dans le cas des jeux coopératifs.

Conclusion générale

Le modèle de fonction d'effectivité permet d'élaborer une théorie de gouvernance fondée sur la nature du pouvoir et ses mécanismes. Cette possibilité dépasse largement des éléments présentés dans ce travail car elle permet également d'analyser les formes de conflits générés par les règles de vote (travaux en cours) et la consistance des institutions par rapports aux déviations des coalitions. La souplesse de cette représentation permet également d'aborder la question d'implémentation : mise en relation du processus de sélection de l'issue sociale avec un ou des objectifs sociaux. Comme par exemple l'implémentation par le dialogue, par un processus d'apprentissage ou par un mode de sélection stratégique .

Les travaux de thèse présentés dans ce document, qui représente une infime partie des résultats en fonction d'effectivité, est loin d'explorer les classes de problèmes traitées par la fonction d'effectivité. Par exemple, dans un travail en cours de Razafimahatolotra Dawidson et Damien Bazin, la fonction d'effectivité a permit d'identifier les formes de conflits qui seraient générés par une règle de vote telle que le vote par évaluation et le vote par approbation. Dans les travaux d'Emmanuel Picavet et de Dawidson Razafimahatolotra , la fonction d'effectivité est utilisée comme outil d'éclaircissement de problèmes politico-juridiques et dans un travail de Sahondravolona Rajemison etDawidson Razafimahatolotra , elle est utilisée pour aborder le problème de gouvernance d'entreprise. Nous citons également les travaux de Peleg qui s'en sert pour formaliser la constitution, et les travaux de Vannucci qui fait recours à la fonction d'effectivité pour modéliser les formes de gouvernement de régime parlementaire. Ainsi, la fonction d'effectivité offre un moyen de formalisation et d'éclaircissement de nombreux problèmes en sciences sociales.

Bibliographie

[1] Abdou J. (1982), "Stabilité de la fonction veto, cas du veto maximal", Mathématiques et Sciences Humaines 80, p 39-65. (Cité pages 15, 19, 28, 31 et 35.)

[2] Abdou, J. (2000), "Exact stability and its application to strong solvability", Mathematical Social Sciences 39, p 263 - 275. (Cité pages 9, 28 et 29.)

[3] Abdou J. (2003), "From Nakamura number to instability index", in `http://www.cscs.umich.edu/events/decentralization07/` (Cité pages 19, 29 et 40.)

[4] Abdou, J. (2008), "A Stability Index for Local Effectivity Functions", Ongoing paper. (Cité pages 29 et 40.)

[5] Abdou, J. et H. Keiding (1991), "Effectivity Functions in Social Choice", Dordrecht : Kluwer Academic press. (Cité pages 9, 15, 28, 31, 40, 60, 71, 87 et 93.)

[6] Abdou, J. and H.Keiding (2003), "On necessary and sufficient conditions for solvability of game forms", Mathematical Social Sciences 46, p 243 - 260. (Cité page 28.)

[7] Aghion P. et J. Tirole (1997), "Formal and Real Authority in Organisation", Journal of Political Economy, 105, 1-29. (Cité pages 26 et 89.)

[8] Baujard, A. and H. Igersheim (2009), "Expérimentation du vote par note et du vote par approbation le 22 avril 2007. Premiers résultats", Revue Economique, Vol.60, n°1, Janvier. (Cité page 11.)

[9] Baujard, A., T. Senné, and H. Igersheim (2009), "An analysis of the French political supply. An analysis based on experimental data", Document de travail CREM.

[10] Amarate M. and Monttrucchio L. (2007), "Mas-Colell bargaining set of large games", The carlo alberto notebooks 63, www.carloalberto.org.

[11] . Anderson R.M., Trockel W. and Zhou L. (1997), " Nonconverngence of the Mas-Colell and Zhou bargaining sets", Econometrica 65, p 1227-1239. (Cité page 66.)

[12] Aumann R. & Maschler M. (1964), "The bargaining set for cooperative games", in Advence in game theory. (M. Dresher, L.S Shapley, and A.W Tucker, Eds), Annals of mathematica Studies No. 52, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ. (Cité page 66.)

[13] Banzhaf J.F (1965), "Weighted voting doesn't work : A mathematical analysis", Rutgers Law Review 19 N° 2, p 317 - 343. (Cité pages 4 et 27.)

[14] Barua R., Chakravarty S.R and Roy S. (2007), "A new characterisation of the Banzhaf index of power", Staff General Reaserch papers 12808, Iowa State University, Depertment of Economics. (Cité pages 4 et 27.)

[15] Billera L.J. (1970), "Existence of General bargaining sets for cooperative games without side payments", Bull. Amer. Math. Soc. Volume 76, Number 2, p 375 - 379.

[16] Bondareva, Olga N (1963), "Some appliations of linear programming methods". Problemy Kybernetiki 10, p 119 - 139. (Cité page 46.)

[17] Danilov V. and Alexander I. S. (2002), "Social Choice Mechanism", Springer. (Cité pages 9, 31 et 40.)

[18] Dubey P, Einy E. and Haimanko O. (2003), "Compound voting and the Banzhaf index", http ://ratio.huji.ac.il/dp/haimanko333.pdf. (Cité pages 4, 6 et 27.)

[19] Dutta B., Ray D., Sengupta K and Vohra R. (1989), "A consistent bargaining set", Journal of economic theory, vol 49, p 93 - 112. http://www.econ.nyu.edu/user/debraj/Papers/ConsBargJET89.pdf (Cité pages 66 et 112.)

[20] Einy E. and Wettstein D. (1996), "Equivalence between bargaining sets and the core in simple games", Int J of game theory 25, p 65-71.

[21] Greengerg J. (1987) " The core as abstract stable sets", Mimeo, university of Haifa.

[22] Holzman R. (2001), "The comparability of the classical and the Mas-Colell bargaining sets", Int J Game Theory 29, p 543-553. (Cité page 66.)

[23] Lehrer E. (1988), " An aximatisation of the banzhaf value", International Journal of Game Theory, 17 Issue 2, p 89-99. (Cité pages 4 et 27.)

[24] Hans Keiding (1985), "Necessary and sufficient conditions for stability of effectivity functions", International Journal of Game Theory, 14 N°2. (Cité pages 15, 19, 23, 28, 29, 31, 40, 46 et 56.)

[25] Hans Keiding and Razafimahatolotra D. (2008), "Core rationalization of the social choice correspondance", papier en cours. (Cité page 27.)

[26] Hans Keiding and Razafimahatolotra D. (2008), "Effectivity function and the bargaining sets", papier en cours. (Cité pages 12, 27 et 81.)

[27] Kolpin V. (1991), "Mixed effectivity and the essence of stability", Social Choice and Welfare, vol 8, p 51 - 63. (Cité pages 22, 31, 43, 46, 50, 56 et 71.)

[28] Mas-Colell A. (1989), " An equivalence theorem for a bargaining set", Journal of Mathematical Ecnoomics, vol 9, p 129 - 139. (Cité pages 66 et 112.)

[29] Mizutani M., Hiraide Y. and Nishino H. (1993), "Computational complexity to verify the unstability of effectivity funcion", International Journal of Game Theory vol 22, p 225 - 239. (Cité page 31.)

[30] Mizutani M., Nae Chan Lee, Nishino H.(1994), "On the Equivalence of Balancedness and the Stability in Effectivity Function Games", Journal of Operation Research, Society of Japan, vol 37, N° 3. (Cité pages 23, 43 et 56.)

[31] Moulin H. (1981), "The proportional veto principle", The Review of Economic Studies, vol 48 N 3. (Cité pages 5, 26, 40, 43, 69 et 93.)

[32] Moulin, H. and B.Peleg (1982), "Cores of effectivity functions and implementation theory", Journal of Mathematical Economics, 10, p 115 - 162. (Cité pages 5, 12, 27 et 28.)

[33] Moulin H. (1994), " The Strategy of Social Choice", Advanced Textbooks in Economics, 18. (Cité pages 5, 26, 40 et 43.)

[34] Nakamura K. (1979), " The vetoers in a simple game with ordinal preferences", International Journal of Game Theory, 8 : 55-61. (Cité pages 40 et 58.)

[35] Otten G.-J., Borm P., Storcken T. and Tijs S.(1997), "Decomposable effectivity functions", Mathematical Social Sciences 33 Number 3, 1, p 277 - 289. (Cité pages 14, 43 et 58.)

[36] Peleg, B. (2005), "Constitutional implementation of social choice correspondance", Internationa Journal of Game Theory, 33, p 381-396. (Cité pages 5, 9 et 27.)

[37] Peleg, B. & Sudhölter, P. (2001), "The dummy paradox of the bargaining set", Working papers 324, University of Bielefeld, Insitute of Mathematical Economics ou http://ratio.huji.ac.il/dp/dp256.pdf. (Cité page 66.)

[38] Bezalel Peleg & Peter Sudhölter (2005) "On the Non-Emptiness of the Mas-Colell Bargaining Set", Journal of Mathematical Economics Volume 41, Issue 8, p 1060-1068 ou http://ratio.huji.ac.il/dp/dp360.pdf. (Cité pages 66 et 72.)

[39] Peleg, B. (1998), "Effectivity function, game forms, games, and rights", Social Choice and Welfare 15, p 67 - 80. (Cité pages 5 et 27.)

[40] Peleg, B. and P. Südhölter (2007), "Introduction to the theory of cooperative games", 2nd ed., Springer, Berlin Heidelberg New York.

[41] Peleg, B. R Holzman and Peter Sudhölter (2005), "Bargaining sets of majority voting games", Discussion paper, 410, http://ratio.huji.ac.il/dp/dp410.pdf (Cité pages 48, 66 et 72.)

[42] Picavet, E. (2008), "Talos ou la matrice libéral". Document inclut dans l'Habilitation de Recherche (HDR). (Cité page 5.)

[43] Picavet, E. (1998), "Rights and Powers : Reflections on Bezalel Peleg's Theory of Effectivity Functions, Game Forms, Games and Rights", in : Laslier, J.-F., Fleurbaey, M., Gravel, N. et Trannoy, A., Freedom in Economics - New Perspectives in Normative Analysis, Londres, Routlege. (Cité page 27.)

[44] Picavet E. & Razafimahatolotra D. (2007), "Sur la formalisation de la pluralité des interprétations en matière normative", Publication of the "Deuxième Congrès de la Société de Philosophie des sciences". (Cité pages 5, 26, 27 et 89.)

[45] Picavet E. & Razafimahatolotra D. (2008), "Analysing Plural Normative Interpretations in Social Interactions". Publication de l'Université d'Etat de Saint Petersbourg. (Cité page 26.)

[46] Razafimahatolotra D. (2008), "Équilibre et stabilité d'une fonction d'effectivité", Chapitre 3.

[47] Razafimahatolotra D. et Bonnour R. (2009), "Fréquence de la vacuité du coeur d'une fonction d'effectivité", Travail en cours. (Cité pages 87 et 98.)

[48] Razafimahatolotra D. (2008), "Equilibre du pouvoir et stabilité de l'organisation", travail en cours. (Cité page 26.)

[49] Razafimahatolotra D. (2008), "Rationalisation et régulation des pouvoirs dans une organisation", Chapitre 6 (Cité page 27.)

[50] Razafimahatolotra D. (2008), "Les cycles et la forme des conflits dans les fonctions d'effectivité", Chapitre 2. (Cité pages 15, 49, 59, 60 et 78.)

[51] Ray B, "Credible coalition and the core", Internat. J. Game Theory, in press, 18, p 185-187. `http://www.nyu.edu/econ/user/debraj/Papers/ijgt89.pdf`

[52] Shapley L.S (1953), "A value of n-person games", In contribution to the theory of games, volume II, by the Kuhn and A.W Tucker, editors. Annals of Mathematical Studies 28, p 307-317. Princeton University Press. (Cité pages 4, 27 et 46.)

[53] Shapley L.S. and Shubik, (1954), "A method for evaluating the distribution of Power in a committee system", American Political Science Review, 48, p 307-317. (Cité pages 4, 6 et 27.)

[54] Straffin P.D., (1988) " The Shapley-Shubik and Banzhaf power indices as probabilities",. The Shapley Value : Essays in Honor of Lloyd S. Shapley Chap 5. (Cité pages 4 et 27.)

[55] U. (1994), "Bargaining set with small coalition", Int J of Game Theory, vol 23, p 49-55.

[56] Shimura K.I. (1997), "Quasi-cores in bargaining sets", Int Jour of game theory, n 26, p 283-302.

[57] Takamiya K. and Tanaka A. (2006), " Computational complexity in the design of voting rules", Discussion paper No 653. (Cité page 31.)

[58] Tchantcho, B. and L.D.Lambo (2008), "A characterization of social choice correspondences that implement the core of simple games", to appear in : Economic Theory.

[59] Van Deemen (1997), "Coalition formation and Social choice", Kluwer academicpublishers. (Cité page 26.)

[60] Van Hees, M. (1995), "Rights and Decisions. Formal Models of Law and Liberalism", Dordrecht, Kluwer, Series : Law and Philosophy Library, Vol. 23. (Cité pages 5 et 27.)

[61] Vind K. (1992), "Two wharacterizations of bargaining sets", Journal of Mathematical Economics 21, p 89-97.

[62] Vannucci S., "Effectivity Functions, Opportunity Ranking, and Generalised Desirability Relation", Document de travail, Université de Sienne. (Cité pages 5 et 27.)

[63] Vincent M. (2008), "Vote à deux niveaux", Colloque du projet DELICOM, juin 2008. (Cité page 27.)

[64] Vohra R. and Sorano R. (2002), "Impementing the Mas-Colell bargaining set",.Investigaciones económicas. vol. 27 (2), p 285-298 ou `http://ftp.funep.es/InvEcon/paperArchive/May2002/v26i2a3.pdf`. (Cité page 66.)

[65] Young H.P. (1998), "Individual contribution and just compensation",. The Shapley Value : Essays in Honor of Lloyd S. Shapley Chap 17. (Cité pages 4 et 27.)

[66] Zhou L. (1994), " A new bargaining set of an N- person game and endogenous coalition formation", Games and Economic Behaviour 6, p 512-526. (Cité pages 66 et 113.)

Titre Une contribution à la théorie du pouvoir :
Conflits - Négociation et Stabilité

Directeur de thèse : Pr. Joseph ABDOU

Résumé Une fonction d'effectivité représente la distribution de pouvoir aux coalitions dans une organisation. Cette thèse aborde différentes questions en rapport avec la théorie de la gouvernance, et propose des études formelles des problèmes posés. Étant répartie en six chapitres, elle s'intéresse plus particulièrement au mécanisme d'interaction des joueurs pour aboutir à un "accord social", et aux propriétés mathématiques de ces mécanismes : la vulnérabilité face aux conflits, la possibilité de la négociation ainsi que la stabilité.

Mots-clés Fonction d'effectivité, conflit, coeur, marchandage, stabilité, choix social, gouvernance, rationalité.

Title Conflicts Negociation and Stability

Abstract An effectivity function represents the distribution of the power over coalitions in organization. This PhD tackles several questions on governance with a formal approach. It has six chapters where the main problematic concerns mechanisms of social interaction for getting a "solution". It analyzes the mathematical properties of theses mechanisms and the properties of the solution. .

Keywords Effectivity function, conflict, bargaining, core, stability, social choice, governance, rationality.